Corso di Laurea Architettura u.e. - a.a. 2006/2007

Matematica II 26 febbraio 2007-

Cognome: .... **Nome**: ....

Esercizio 1. Determinare e **disegnare** il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(x+3y)(x-y^2)}}{xy}$$

Risposta: La funzione è definita se l'argomento della radice è positivo e il denominatore è diverso da zero. Quindi otteniamo

$$(x+3y)(x-y^2) \geq 0, \quad e \quad xy \neq 0.$$

$(x+3y)(x-y^2) \geq 0$ se i due termini del prodotto sono dello stesso segno. Si osservi che $x+3y=0$ è una retta passante per l'origine mentre $x-y^2=0$ è una parabola con asse parallelo all'asse delle x. L'espressione $x-y^2$ è positiva all'interno della parabola.

Nel disegno del dominio sono rigate queste due parti, pertanto il dominio è composto dalla parte che è doppiamente rigata e dalla parte che non è rigata, escludendo gli assi delle x e delle y.

Esercizio 2. Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$. Dire se sono dei punti estremali o dei punti di sella.

Risposta: I punti critici sono i punti in cui si annulla il gradiente pertanto dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ -x + 6x^2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ x(-6 + x) = 0 \end{cases}$$

E quindi abbiamo trovato i punti $(0,0)$ e $(6,108)$.

Per determinare il tipo di punto critica si calcola la matrice Hessiana:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow det H(0,0) = -1 < 0$$

Quindi $(0,0)$ è un punto di sella.

$$H(6,108) = \begin{pmatrix} 36 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow det H(6,108) = 72 - 1 = 71 > 0$$

Quindi (6,108) è un punto estremale e precisamente un minimo dato che $36 > 0$.

Esercizio 3. Sia $D = \{(x, y);\ 2 \le x^2 + y^2 \le 4\}$. Calcolare l'integrale

$$\int\int_D y - x \ dxdy.$$

Risposta: Siccome il dominio è una corona circolare di raggio esterno 2 e raggio interno $\sqrt{2}$, l'integrale si svolge usando le coordinate polari $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, con il raggio $r \in [\sqrt{2}, 2]$ and $\theta \in (0, 2\pi)$:

$$\int\int_D y - x \ dxdy = \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_0^{2\pi} (r\sin\theta - r\cos\theta) r dr d\theta = \int_{\sqrt{2}}^{2} r^2 dr \int_0^{2\pi} (\sin\theta - \cos\theta) d\theta.$$

Siccome $\int_0^{2\pi}(\sin\theta - \cos\theta)d\theta = -\cos\theta - \sin\theta \,|_0^{2\pi} = 0$, si ottiene che $\int\int_D y - x \ dxdy = 0$. (Questo si poteva anche dire direttamente perchè il dominio è simmetrico rispetto agli assi, mentre la funzione è la differenza di due funzioni dispari una rispetto alle x e l'altra rispetto alle y.)

Esercizio 4. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = e^x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Risposta: Si tratta di un equazione lineare del secondo ordine. Risolviamo prima l'equazione omogenea $y'' + 2y' - 3y = 0$ cercando le soluzioni dell'equazione algebrica associata $t^2 + 2t - 3 = 0$ che ha soluzioni $t = 1$ e $t = -3$. Se ne deduce che l'equazione omogenea ha soluzione

$$y_o(x) = C_0 e^x + C_1 e^{-3x}.$$

Ora cerchiamo la soluzione particolare: si osservi che il termine noto è e^x, che è anche soluzione dell'omogenea, per cui la soluzione particolare sarà del tipo $y_p(x) = Axe^x$. Per determinare A, calcoliamo y' e y'' e li mettiamo nell'equazione: $y' = e^x A(x+1)$, $y'' = e^x A(x+2)$:

$$e^x A(x+2) + 2e^x A(x+1) - 3Axe^x = 4Ae^x = e^x, \Rightarrow 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione è $y(x) = C_0 e^x + C_1 e^{-3x} + \frac{1}{4}xe^x$.

Imponiamo le condizioni iniziali per determinare C_0 e C_1:

$$\begin{cases} y(0) = C_0 + C_1 = 0 \\ y'(0) = C_0 - 3C_1 + \frac{1}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = -C_1 \\ -4C_1 = 1 - \frac{1}{4}, \quad C_1 = \frac{-3}{16}. \end{cases}$$

Infine $y(x) = \frac{3}{16}e^x - \frac{3}{16}e^{-3x} + \frac{1}{4}xe^x$.

Esercizio 5. Sia il campo vettoriale $F = (x^2y, \frac{1}{3}x^3 + y)$.

a)Calcolare il lavoro di F lungo la curva γ parametrizzata da

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases}, \ t \in [0, \frac{3\pi}{2}].$$

b) Determinare una curva γ tale che affinché $L(F,\gamma) = 0$

Risposta: Siccome dobbiamo calcolare il lavoro di F vogliamo prime verificare se il campo è conservativo. Per definizione un campo conservativo è il gradiente di una funzione detta potenziale e il lavoro si ottiene calcolando il potenziale negli estremi della curva e facendone la differenza.

Siccome F è definito in tutto R^2 se verifichiamo che è irrotazionale allora sappiamo che è anche conservativo. Un campo è irrotazionale in R^2 se la derivata in y della prima componente è uguale alla derivata in x della seconda componente. Siccome

$$\frac{\partial(x^2y)}{\partial y} = x^2, \quad \text{e} \quad \frac{\partial(\frac{1}{3}x^3 + y)}{\partial x} = x^2$$

si ottiene che il campo è irrotazionale in R^2 e dunque conservativo. Ora possiamo cercare il potenziale $f(x,y)$, cioè una funzione tale che $\partial_x f$ sia la prima componente del campo F mentre $\partial_y f$ sia la seconda componente:

$$\begin{cases} \partial_x f = x^2y \\ \partial_y f = \frac{1}{3}x^3 + y. \end{cases}$$

La prima equazione implica che $f(x,y) = \int x^2y dx = \frac{1}{3}x^3y + g(y)$ dove $g(y)$ è una funzione da determinare. Per determinarla, deriviamo in y il risultato ottenuto e sostituiamo nella seconda equazione:

$$\partial_y f = \frac{1}{3}x^3 + g'(y) = \frac{1}{3}x^3 + y \Rightarrow g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

Abbiamo ottenuto che per una qualsiasi costante C,

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3y + \frac{y^2}{2} + C$$

è un potenziale, pertanto scegliamo $C = 0$.

Gli estremi della curva (che è un trequarti di cerchio) sono dati da $(x(0), y(0)) = (2,0)$ e $(x(\frac{3\pi}{2}), y(\frac{3\pi}{2})) = (0,-2)$ Quindi

$$L(F,\gamma) = f(0,-2) - f(2,0) = 2 - 0 = 2.$$