Corso di Laurea Architettura u.e. - a.a. 2006/2007

Matematica II 2/ 07/ 2007-

Cognome: .... **Nome**: ....

Esercizio 1. Determinare e **disegnare** il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{2x+y-1}{x^2-y^2}}$$

Risposta: L'argomento sotto il segno di radice deve essere positivo perciò la prima richiesta è $\frac{2x+y-1}{x^2-y^2} \geq 0$ poi l'argomento del denominatore non deve essere nullo quindi $x^2 - y^2 \neq 0$.

La condizione $\frac{2x+y-1}{x^2-y^2} \geq 0$ è verificata quando i membri del rapporto hanno lo stesso segno perciò, tenendo conto anche della seconda condizione si ottiene

$$\begin{cases} 2x+y-1 \geq 0 \\ x^2-y^2 > 0 \end{cases} , \quad o \quad \begin{cases} 2x+y-1 \leq 0 \\ x^2-y^2 < 0 \end{cases}$$

E' immediato vedere che l'insieme dei punti che verifica $2x+y-1=0$ è una retta e l'insieme dei punti che verifica $x^2-y^2 = (x-y)(x+y) = 0$ sono due rette $x = y$ e $x = -y$. Nel grafico allegato sono "rigate" in verticale le zone di piano dove $x^2 - y^2$ è positivo e è "rigata" in orizzontale la zona di piano dove $2x+y-1$ è positivo.

Quindi il dominio è costituito sia dalle porzioni di piano che nel disegno è sono rigate orizzontalmente e verticalmente (queste corrispondono al primo sistema cioe' quando ambedue le espressioni sono positive), che dalle porzioni di piano che non sono affatto rigate (queste corrispondono al secondo sistema cioe' quando ambedue le espressioni sono negative),

Esercizio 2. Sia $D = \{(x, y),\ x^2 - 2 \le y \le -x^2 + 6\}$. Calcolare l'integrale

$$\int\int_D x + 1\ dxdy.$$

Risposta: Già dalla definizione di D vediamo che si tratta di un dominio normale rispetto all'asse x. Inoltre, siccome $y = x^2 - 2$ è una parabola rivolta verso l'alto centrata sull'asse delle y e $y = -x^2 + 6$ è una parabola rivolta verso il basso centrata sull'asse delle y, basta trovare l'intersezione delle due parabole par conoscere gli estremi di integrazione della x.

I punti di intersezione sono dati dai valori della x percui $x^2 - 2 = -x^2 + 6$ cioè

$$2x^2 = 6 + 2, \quad \Rightarrow x^2 = 4 \quad \Rightarrow x = -2 \quad e \quad x = 2.$$

Infine otteniamo

$$\begin{aligned}
\int\int_D x + 1\ dxdy &= \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2-2}^{-x^2+6} x + 1\, dy = \int_{-2}^{2} (x+1)y \,|_{x^2-2}^{-x^2+6} dx = \\
&= \int_{-2}^{2} (x+1)((-x^2+6) - (x^2-2))dx = \int_{-2}^{2} (x+1)(-2x^2+8)dx = \\
&= \int_{-2}^{2} -2x^3 - 2x^2 + 8x + 8dx = \frac{-1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 8x \,|_{2}^{2} = -\frac{32}{3} + 32
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2x^2 \\ y(0) = 3, \end{cases}$$

Risposta: Si tratta di un equazione differenziale del primo ordine a variabile separate, cioè del tipo $y' = f(y)g(x)$. Una soluzione è data dalle funzioni costanti $y(x) = y_0$ dove y_0 è un valore per il quale si annulla la funzione f. Qui la funzione è data da $f(y) = y^2$ che si annulla solo per $y = 0$ quindi una soluzione dell'equazione differenziale è $y(x) \equiv 0$. Ma questa soluzione non verifica la condizione di Cauchy $y(0) = 3$.

Infatti la condizione di Cauchy ci permette di dire che in un intorno del punto iniziale $y \neq 0$ per cui possiamo dividere per y^2 e poi integriamo:

$$\frac{y'}{y^2} = x^2, \quad \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y^2(x)}dx = \int x^2 dx.$$

Con la sostituzione $y = y(x)$ che implica $dy = y'(x)dx$ otteniamo:

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C \Leftrightarrow \frac{-1}{y} = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Ora risolviamo questa equazione e otteniamo

$$y(x) = \frac{1}{-\frac{1}{3}x^3 - C}$$

(ATTENZIONE ad invertire tutto il termine a destra dell'uguaglianza e non solo il temine in x , voglio dire che $y(x) = \frac{-3}{x^3} - C$ è SBAGLIATO.)

Ora imponiamo la condizione di Cauchy, cioè troviamo per quali C vale $y(0) = 3$

$$y(0) = \frac{1}{-C} = 3 \Rightarrow C = \frac{-1}{3} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{-x^3 + 1}$$

Esercizio 4. Sia il campo vettoriale $F = (y + 2x, x - y)$.

a)Calcolare il lavoro di F lungo la curva γ parametrizzata da

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 4\sin t \end{cases}, \ t \in [0, \frac{3\pi}{2}].$$

Risposta: Siccome dobbiamo calcolare il lavoro di F vogliamo prime verificare se il campo è conservativo. Per definizione un campo conservativo è il gradiente di una funzione detta potenziale e il lavoro si ottiene calcolando il potenziale negli estremi della curva e facendone la differenza.

Siccome F è definito in tutto R^2 se verifichiamo che è irrotazionale allora sappiamo che è anche conservativo. Un campo è irrotazionale in R^2 se la derivata in y della prima componente è uguale alla derivata in x della seconda componente. Siccome

$$\frac{\partial(y + 2x)}{\partial y} = 1, \quad \text{e} \quad \frac{\partial(x - y)}{\partial x} = 1$$

si ottiene che il campo è irrotazionale in R^2 e dunque conservativo.

Ora possiamo cercare il potenziale $f(x, y)$, cioè una funzione tale che $\partial_x f$ sia la prima componente del campo F mentre $\partial_y f$ sia la seconda componente:

$$\begin{cases} \partial_x f = y + 2x \\ \partial_y f = x - y. \end{cases}$$

La prima equazione implica che $f(x, y) = \int(y+2x)dx = yx+x^2+g(y)$, dove $g(y)$ è una funzione da determinare. Per determinarla, deriviamo in y il risultato ottenuto e sostituiamo nella seconda equazione:

$$\partial_y f = x + g'(y) = x - y \Rightarrow g'(y) = -y \Rightarrow g(y) = -\frac{y^2}{2} + C.$$

Abbiamo ottenuto che per una qualsiasi costante C,

$$f(x, y) = yx + x^2 - \frac{y^2}{2} + C$$

è un potenziale, pertanto scegliamo $C = 0$.

Gli estremi della curva (che è un trequarti di ellisse) sono dati da $(x(0), y(0)) = (2, 0)$ e $(x(\frac{3\pi}{2}), y(\frac{3\pi}{2})) = (0, -4)$ Quindi

$$L(F, \gamma) = f(0, -4) - f(2, 0) = -8 - (4) = -12.$$