23/10/20
I

Riepilogo.

Funzioni di più variabili:

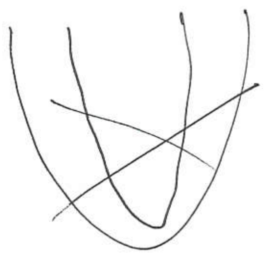
$$f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_N) \longrightarrow f(x_1, \dots, x_N).$$

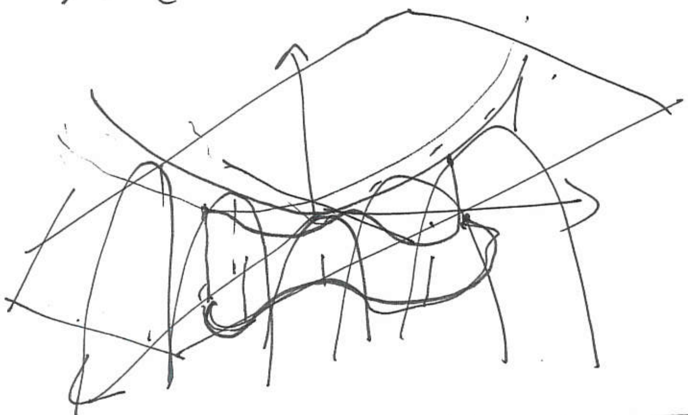
$N = 2$ $\quad f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(x, y) \longrightarrow f(x, y).$$

Grafico di f, $\{P \in \mathbb{R}^3,\ P = (x, y, z),\ (x, y) \in D,\ z = f(x,y)\}$

D è l'insieme di definizione

Curve di livello, $I_c = \{(x, y)$ t. c. $f(x, y) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$





Restrizioni di una funzione a una curva.

Sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \Longrightarrow f$ e $(x(t), y(t)) \in D$ $\forall t \in [a, b]$

$t \longrightarrow (x(t), y(t))$ $\quad (x(t), y(t)) \to f(x(t), y(t)) = z.$

Con $x(t)$ e $y(t)$ continue

23/10/20

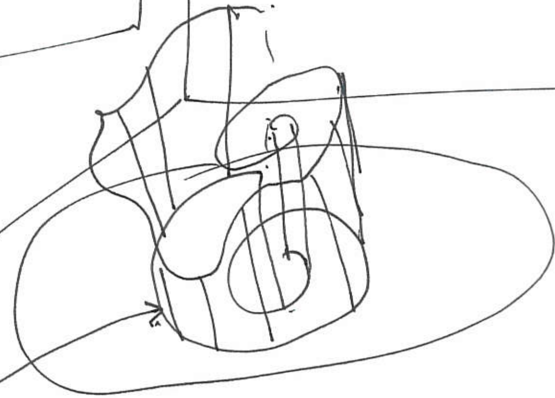
La restrizione di f alla curva φ è data dai punti della curva tridimensionale:

$t \in [a,b]$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f(x(t), y(t)) \end{cases}$$

$$f(x(t), y(t)) \longrightarrow g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \in [a,b] \longrightarrow g(t) = f(x(t), y(t))$$

può essere vista come una funzione di una variabile!



se $\varphi : \boxed{y = mx + b}$ è una retta data dall'equazione

o in versione parametrica $\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = mt + b \end{cases}}$ ma useremo $y = mx + b$

$$g(x) = f(x, mx + b).$$

φ.

Esempio: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow x^2 - y^2.$

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$f(x, mx) = x^2 - (mx)^2$

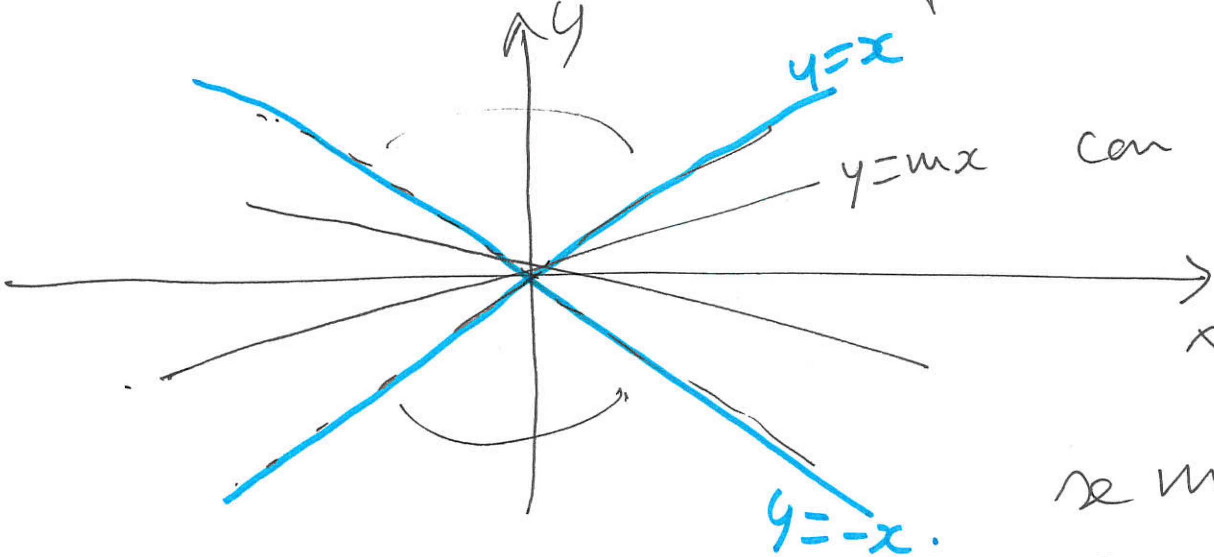
Trovare ~~le~~ le Restrizioni di f alle ~~rette~~ rette passanti per l'origine.

cioè $\boxed{y = mx}$

$$f(x, mx) = x^2 - (mx)^2 = x^2(1 - m^2).$$

se $m^2<1 \implies 1-m^2>0 \rightarrow f(x,mx)=(1-m^2)x^2$ è una

parabola rivolta verso l'alto

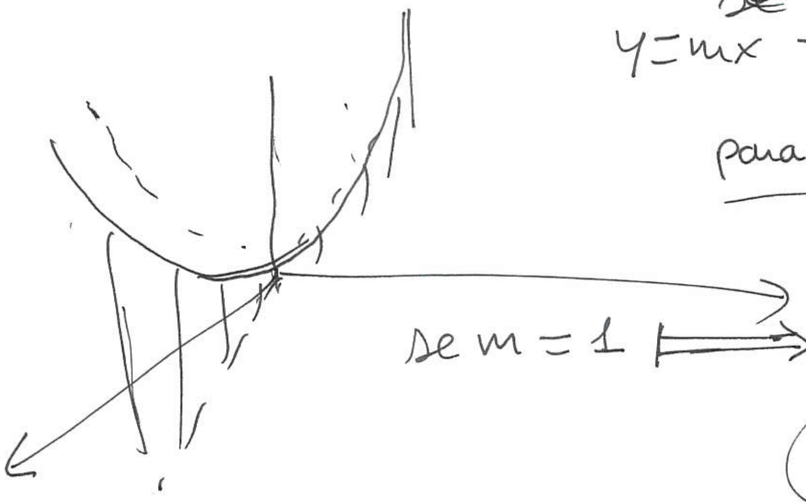


$y=mx$ con $m^2<1$.

se $m^2>1 \Rightarrow (1-m^2)<0$;

$y=mx \rightarrow f(x,mx)=\underbrace{(1-m^2)}_{<0}x$

parabola rivolta verso il basso.



$f(x,y)=x^2-y^2$

se $m=1 \implies y=x \Rightarrow f(x,x)=x^2-x^2=0$

$z=0$.

è la curva livello.

IV 23/10/20 **Limiti e funzioni continue** → 2.3. di Crasta-Malusa

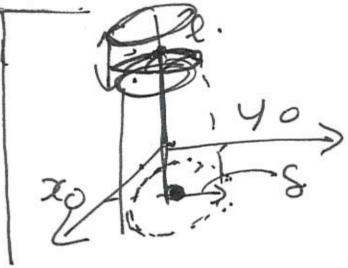
Definizione di limite in un punto.

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto interno al dominio D.

$$l = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \text{se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \text{ t.c. } \left(\forall P = (x,y) \in I_\delta((x_0,y_0)) \setminus (x_0,y_0)\right)$$

$$|f(x,y) - l| \leq \varepsilon .$$



Confrontando con il caso delle funzioni reali di una sola variabile la sola differenza è il modo in cui viene calcolata la distanza in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^2$

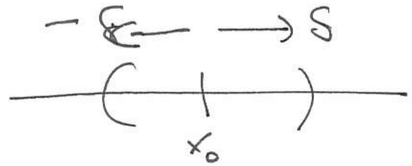
Se $f: I \to \mathbb{R}$

$x_0 \in I$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \text{se} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta, \quad x \neq x_0$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon .$$



VI 23/10/20

Definizione di limite in un punto P appartenente alla chiusura di D.

La chiusura di D è l'insieme dei punti di aderenza di D

P è un punto di aderenza per D se $\forall r > 0$ ~~$\exists P$ t.c.~~ $I_r(P) \cap D \neq \emptyset$.

Esempi di punti di aderenza $\longrightarrow$ Punti interni

$\longrightarrow$ Punti di frontiera.

Se $P = (x_0, y_0)$ è un punto di aderenza di D allora

$$\ell = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$ t.c. $(x,y) \in I_\delta(x_0,y_0) \cap D \setminus \{(x_0,y_0)\}$

$$\Downarrow$$

$$|f(x,y) - \ell| < \varepsilon.$$

VI
23/10/20

<u>Definizione</u> f è <u>continua</u> in $P_0 = (x_0, y_0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Se sapete che una funzione è continua allora per calcolare il limite, basta sostituire il valore del punto nella funzione.

"Tutte le "funzioni elementari" sono continue nei <u>punti interni</u> del loro <u>dominio</u>, <u>escluso</u> la funzione <u>parte intera</u>."

Questo non è un teorema perché non è chiaro cosa sono le "funzioni elementari" è solo un consiglio.

<u>Esempio</u>: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. $\longrightarrow D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

se $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ $\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{x_0 y_0}{x_0^2+y_0^2}$.

O.K.

VII
23/10/20

$f(x,y) = x^2 - y^2$.

$D = \mathbb{R}^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 - y^2 = 0$$

$d((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2+y^2}$

$\forall \varepsilon > 0 \ldots \quad |x^2 - y^2 - 0| < \varepsilon$.

$|x^2 - y^2| < \varepsilon$

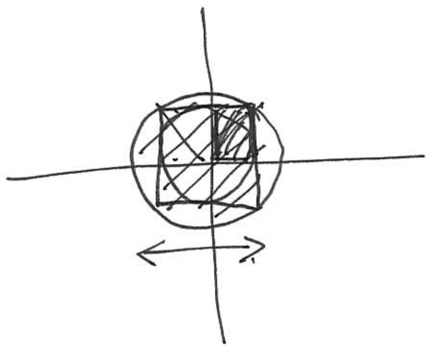
$\Updownarrow$

$x^2 - y^2$

pari come funzione
dispari come funzione
di y.

$-\varepsilon \leq x^2 - y^2 \leq \varepsilon$ (*)

$-\varepsilon \leq (x-y)(x+y) \leq \varepsilon$ (*)



$-\delta < x < \delta \longrightarrow$

$-\delta < y < \delta \longrightarrow \delta > -y > -\delta \longrightarrow -\delta \leq -y \leq \delta$.

$+$

$-2\delta \leq x+y \leq 2\delta$

$-2\delta \leq x-y \leq 2\delta$

$\Longrightarrow$ nel caso in cui

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq x+y \leq 2\delta \\ 0 \leq x-y \leq 2\delta \end{array}}$$

$\Rightarrow 0 \leq (x+y)(x-y) \leq 4\delta^2$.

$4\delta^2 < \varepsilon$.

$4\delta^2 = \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{8}}}$$

Vale per gli altri casi.

per far valere (*) chiedere $4\delta^2$ a δ.

VIII 23/10/2

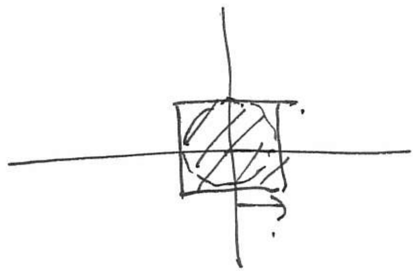
$f(x,y) = x^2 - y^2$ $\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 - y^2 = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon$ t.c. $\quad \sqrt{x^2+y^2} \leq \delta_\varepsilon \Longrightarrow |x^2-y^2| < \varepsilon.$

cerchiamo.

Trovato è che $\quad$ se $\quad |x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{8}}$ e $|y| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{8}} \Longrightarrow |x^2-y^2| < \varepsilon.$

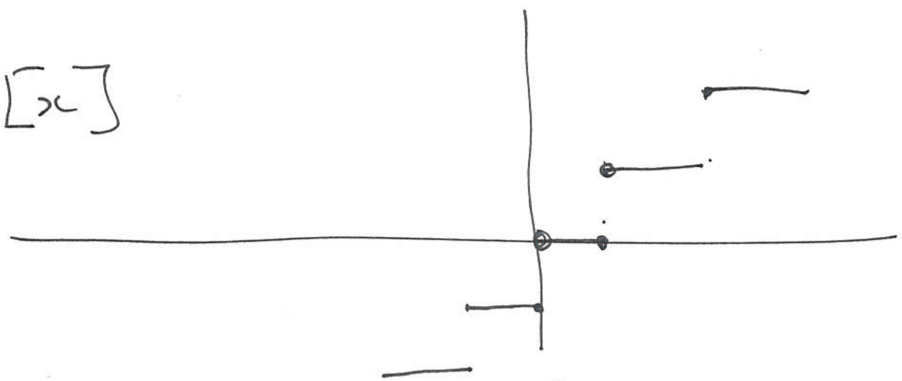
$\Downarrow$



$\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{8}} = \delta_\varepsilon \Longrightarrow |x^2-y^2| < \varepsilon.$

Esempio di funzione elementare che non è continua

$f(x) = [x]$



non è continua

$\Downarrow$

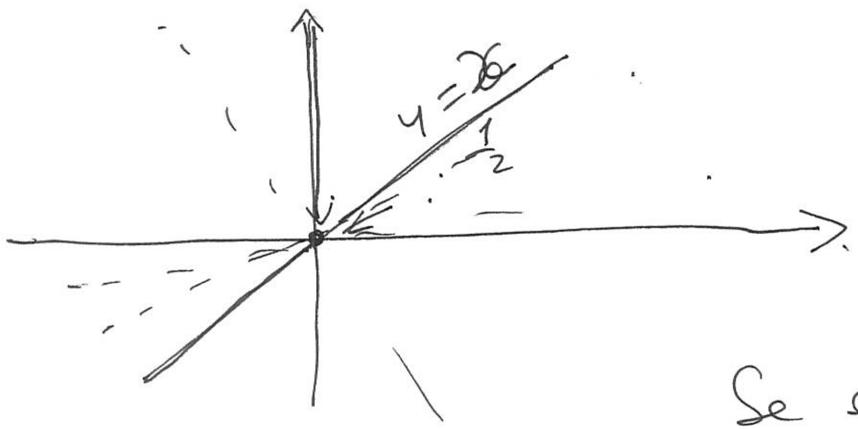
$f(x,y) = [x+y]$. non è continua

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\qquad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\qquad I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

IX
23/10/2

$\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$ $\qquad xy = 0$ $\qquad x = 0$, $y = 0$.

<u>Domande:</u> $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ esiste? se sì quanto vale?



Calcoliamo la funzione ristretta a $x = 0$!! $\quad f(0,y) = 0$

$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$

<u>Se esiste</u> il limite allora $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$.

Calcoliamo f ristretto alla bisettrice cioè $y = x$.

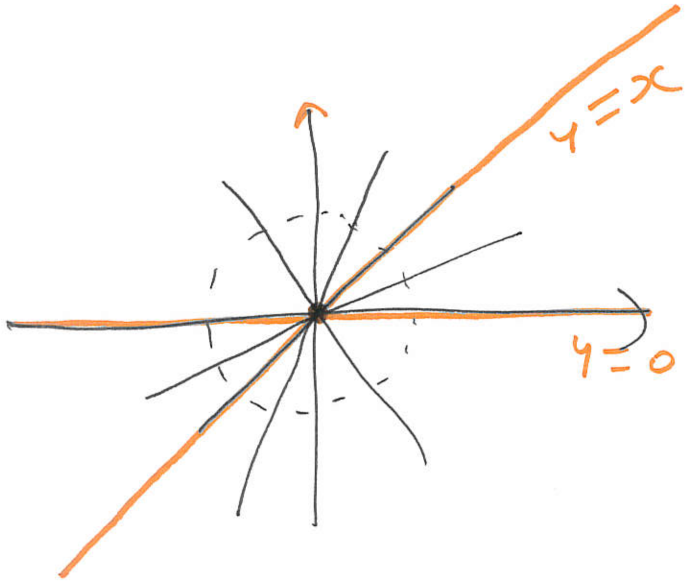
$x \neq 0 \quad f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$.

$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0 \implies \boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}}$ NON ESISTE

$y = 0$ e $y = x \to (0,0)$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ non esiste perché se esistesse

allora $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} f(x,$

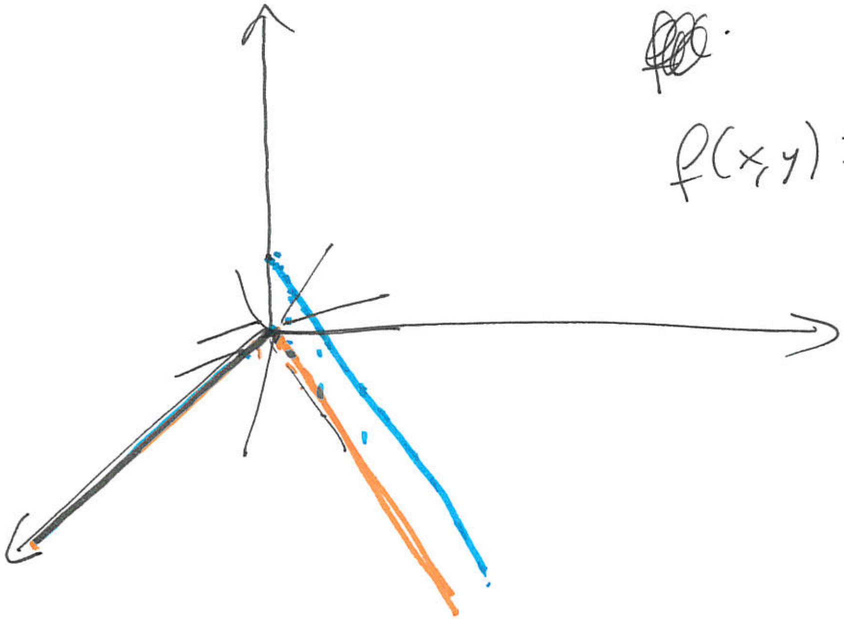


mentre $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}$.

$\neq$.

$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ non è continua.



X
23/10/2

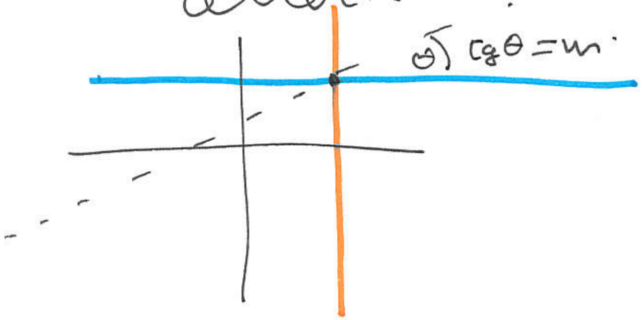
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

<u>1° Verifica</u>

Se (x_0, y_0) è <u>interno</u> al dominio. e f è una funzione elementare calcolate $f(x_0, y_0)$ e questo è il <u>limite</u>

2°) Se <u>non è interno al dominio</u>

allora considero le rette passanti per (x_0, y_0).



$x = x_0 \longrightarrow f(x_0, y) \longrightarrow \lim_{y\to y_0} f(x_0, y)$.

$y = y_0 \longrightarrow f(x, y_0) \longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x, y_0)$

$\boxed{y = m(x-x_0)+y_0} \longrightarrow f(x, m(x-x_0)+y_0)$

$\downarrow$

$\lim_{x\to x_0} f(x, m(x-x_0)+y_0)$

Se questo limite <u>dipende da "m"</u> allora $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ <u>non esiste</u>

$\boxed{\text{X}}$ 23/10/2…

$f(x,y) = \dfrac{x \sin y}{x^2+y^2}$ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (x,y)

Cerchiamo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x \sin y}{x^2+y^2}$.

usando le rette $\boxed{y = mx}$ le rette che si intersecano nell'origine

$$f(x,mx) = \frac{x \sin(mx)}{x^2+m^2x^2} = \frac{\sin(mx)}{(1+m^2)x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx)}{(1+m^2)x} = \lim_{x\to 0} \frac{m\cos(mx)}{(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} \overset{?}{\Longrightarrow}$$

NON ESISTE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x \sin y}{x^2+y^2}$.

$m=0 \longrightarrow \dfrac{m}{1+m^2} = 0$ $\neq$

$m=1 \longrightarrow \dfrac{1}{2}$

$m=\frac{1}{2} \longrightarrow \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{2\cdot 5} = \dfrac{2}{5}$

$m=-1 = -\dfrac{1}{2}$