Funzioni di più variabili.

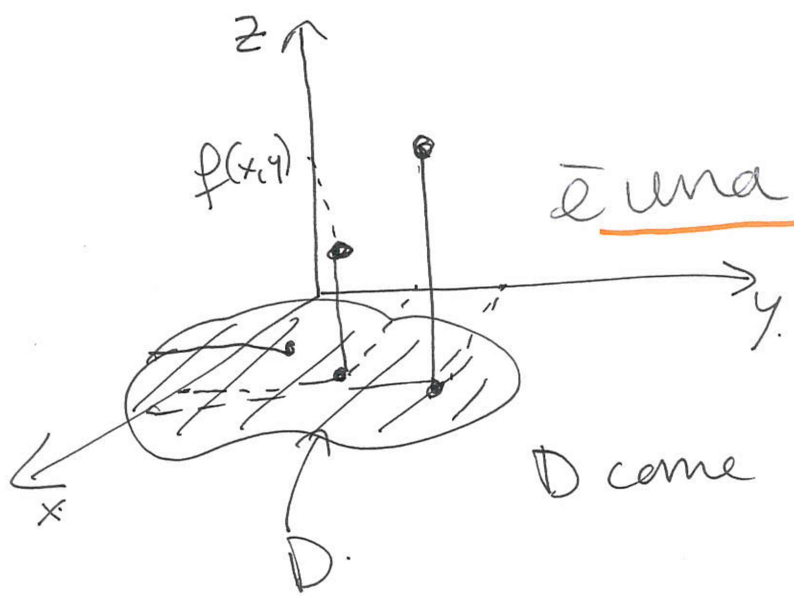
$$f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_N) \in D \longrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$N=2$

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\underset{\substack{\cap \\ D}}{(x,y)} \longrightarrow f(x,y) \in \mathbb{R}$$

Grafico di $f = \{ P = (x,y,z)$ t.c. $(x,y) \in D,\ z = f(x,y) \}$

$\mathbb{R}^3$



è una superficie

D come può essere ?

$$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad I$$
$$x \in I \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

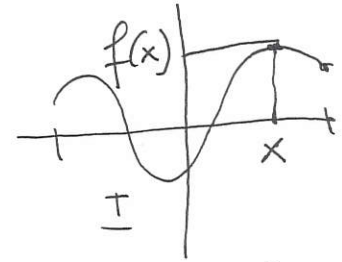
$I = [a,b]$

$I = [a,b)$

$I = (-\infty, a] \cup [b,c] \dots$

grafico di f : $P = (x,y)$

$y = x$.



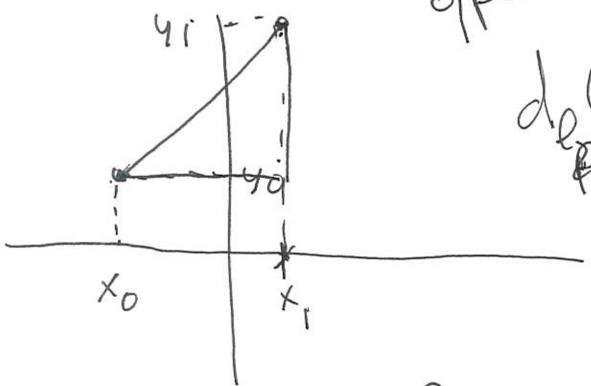
- Curva nel piano.

Elementi di topologia di $\mathbb{R}^2$. (ma vale anche in $\mathbb{R}^N$) II

1°) $\boxed{\text{distanza tra due punti}}$

$P_0 = (x_0, y_0)$ $\qquad P_1 = (x_1, y_1)$.

$$d(P_0, P_1) := \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \rightarrow \text{euclidea.}$$

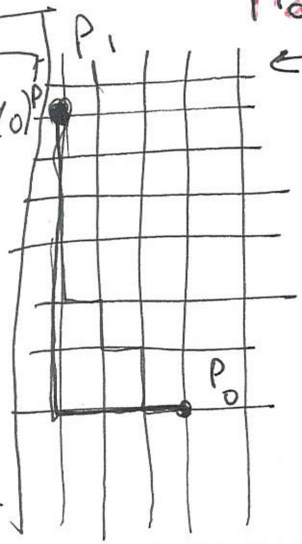


oppure

$$d_{\ell_p}(P_0, P_1) = \sqrt[p]{(x_1 - x_0)^p + (y_1 - y_0)^p}$$

$p > 1$

Ma esistono altre distanze:

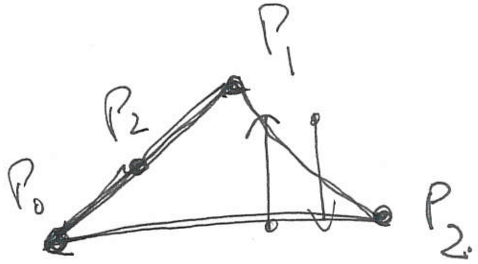


$\leftarrow$ Strade di New-York

$$d_{NY}(P_0, P_1) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$$
$$\|$$
$$d_{\ell_1}(P_0, P_1).$$

Proprietà della distanza.

$$\boxed{\begin{aligned} &1)\ d(P_0, P_0) = 0 \\ &2)\ d(P_0, P_1) = d(P_1, P_0). \\ &3)\ d(P_0, P_1) \leq d(P_0, P_2) + d(P_2, P_1) \end{aligned}}$$

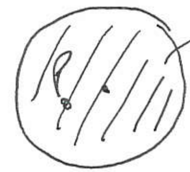


III

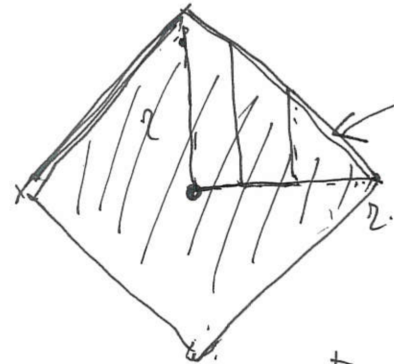
1°) Distanza tra due punti

2°) Def. Intorno di $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $I_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^2,\ d(P_0, P) < r\}$

(per la distanza Euclidea, $I_{r}(P_0)$ è il disco centrato in P_0, di raggio r, escluso il cerchio di raggio r.)



(per la distanza di New York



) → Verificarlo.

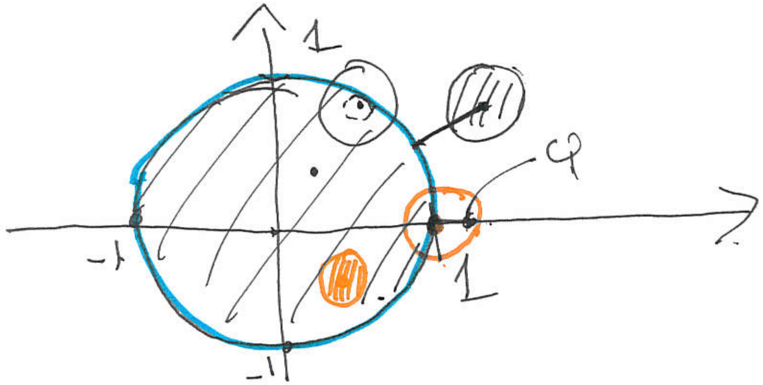
3°) Def: A è un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.
se $\forall P \in A$ esiste un intorno di P contenuto in A.
$P = (x, y)$.

Cioè: se $\forall P \in A$ $\exists r$ t.c. $I_r(P) \subset A$:
$\forall Q \in I_r(P)$, $Q \in A$.

IV

Esempi:

1). $D = \{(x,y)$ t.c. $x^2+y^2 \leq 1\} = B_1(0)$. disco di raggio 1 centrato in $(0,0)$



D è aperto o non è aperto?

$P = (1,0) \in D$? $1^2+0^2 = 1$ sì

$\boxed{\forall\, r = \delta > 0}$ → sia $Q = (1+\frac{\delta}{2}, 0)$ $\delta > 0$

$\boxed{Q \in I_\delta((1,0))}$ verifichiamo →

$\to d(P,Q) = \sqrt{(\frac{\delta}{2})^2} = \frac{\delta}{2} < \delta$ per definizione di intorno

MA $Q \notin D$, $(1+\frac{\delta}{2})^2+0^2 > 1$.

quindi, $I_\delta((1,0)) \not\subset D$

D NON È APERTO.

2) $D_1 = \{(x,y)$ t.c. $x^2+y^2 < 1\}$ → è aperto?

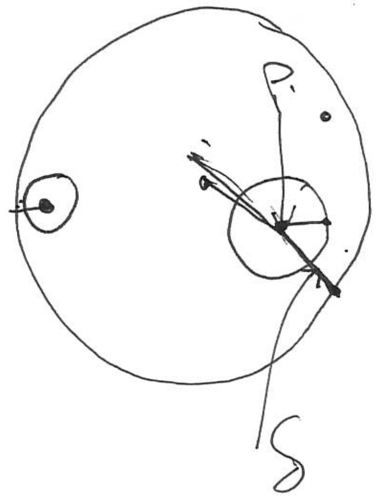
$(1,0) \notin D_1$. $1^2+0^2 = 1 \not< 1$

$P = (-1,0) \longrightarrow (-1)^2+0^2 = 1 \to (-1,0) \notin D$

IV bis

$P = (x,y)$ t.c. $(x^2+y^2) < 1$, $P \in D_1$.

$\sqrt{x^2+y^2} < 1$



~~d~~

$\delta_P = 1 - \sqrt{x^2+y^2} > 0$

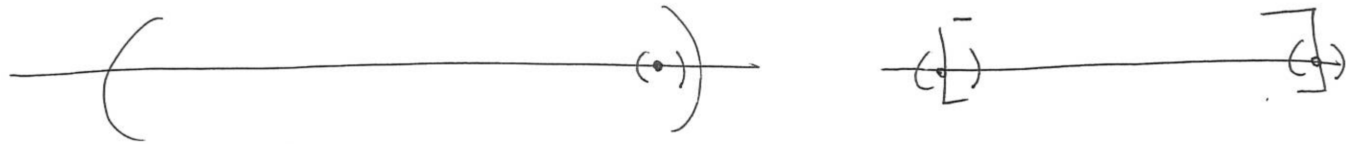
$r = \frac{\delta_P}{2}$.

$I_r(P) \subset D_1$.

Nel caso di $\mathbb{R}$:

$(a,b) = \{a < x < b\}$ intervallo aperto.

$[a,b]$ = intervallo chiuso



VI

4°) **Def.**: Insieme chiuso.

$\complement D$ = complementare di D

D è chiuso se $\mathbb{R}^2 \setminus D$ è aperto.

$D = \{(x,y)$ t.c. $x^2+y^2 \leq 1\}$ è un insieme chiuso

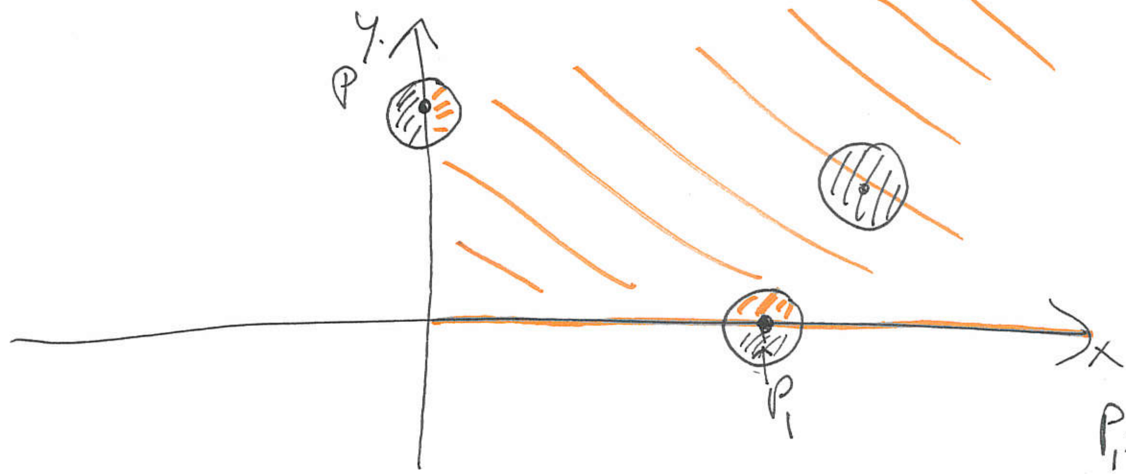
$\complement D = \{(x,y)$ t.c. $x^2+y^2 > 1\}$ è aperto

Esistono insiemi che non sono né aperti, né chiusi. Esempio $F = \{(x,y)$ t.c. $x>0,\ y \geq 0\} = F$

$F = \{(x,y) \text{ t.c. } x > 0, \; y \geq 0\}$ è aperto ? A VIII

è chiuso ? B

né aperto, né chiuso ? C



$P_1 = (x, 0)$ $x > 0$

$\forall r$, $(x, -\frac{r}{2}) \in I_r((x,0)) \rightarrow$ Verificarlo!

ma $(x, -\frac{r}{2}) \notin F$ $-\frac{r}{2} < 0$!!

quindi $I_r((x,0)) \not\subset F$

F non è aperto.

$\complement F$ è aperto? $P = (0, 1) \notin F \Longrightarrow P \in \complement F \Longrightarrow \forall r$ $\exists Q \in I_r((0,1))$

t.c. $Q \in F$

e quind $Q \notin \complement F$.

$\complement F$ non è aperto $\Longrightarrow$ F non è chiuso

Definizione $P \in D$ è un punto interno

$\exists\, r>0$ t.c. $I_r(P) \subset D$

(Non solo il punto appartiene all'insieme ma c'è anche tutto un intorno del punto contenuto nell'insieme).

P è un punto di frontiera:

$\forall\, r>0$ $\quad I_r(P) \cap D \neq \emptyset$

$I_r(P) \cap \complement D \neq \emptyset$.

Complementare di D

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \in D \longrightarrow f(x,y) \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ D insieme di definizione di f, (dominio di esistenza)

(I insieme immag. $= \{ z \in \mathbb{R}$ t.c. $\exists (x,y) \in D$, $\cancel{\text{t.c.}}$ $f(x,y) = z \}$

"valori raggiunti".)

In generale, se una funzione è definita tramite funzioni elementari ~~ecc~~ e non è specificato l'insieme di definizione, si intende per Insieme di definizione, tutti i punti in cui la funzione può essere calcolata.

$$\boxed{\begin{aligned} f: D = \{(x,y),\ x^2+y^2 \le 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow \cos(x^2+y^2). \end{aligned}}$$

qui l'insieme è fissato.

Se invece scrivo, sia $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$, quale è il dominio di esistenza? $\longrightarrow D = \mathbb{R}^2$.

$f(x,y) = \log\left(\frac{x+y}{x-2}\right)$

Dominio ?

IX bis

$D = \{ \cdot \}$

$\begin{cases} x+y>0 \\ x-2>0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x+y<0 \\ x-2<0 \end{cases}$

$\boxed{y > -x}$ $\boxed{x > 2}$

Aperto (a)

Chiuso (b)

né aperto né chiuso (c)

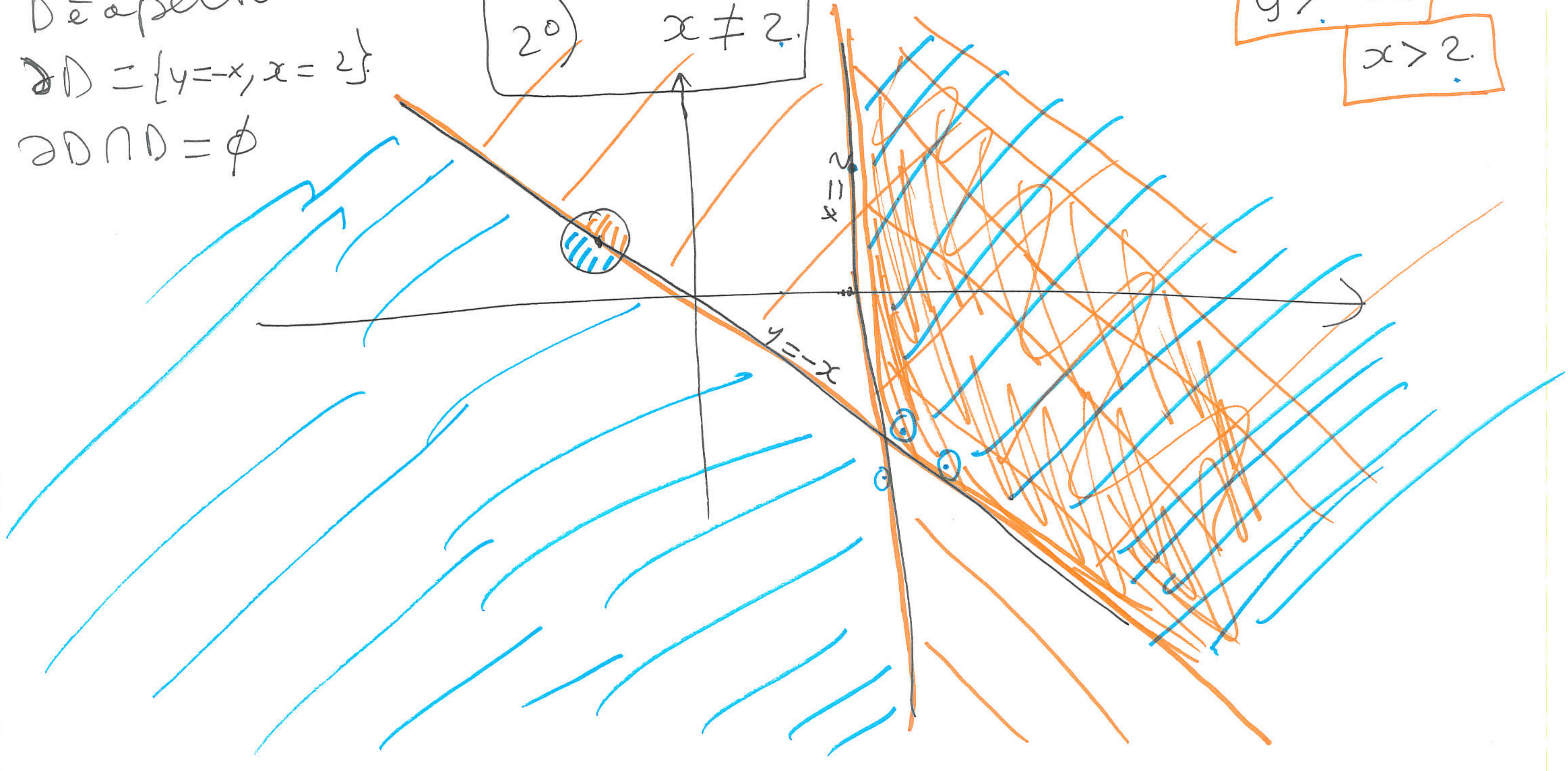
1°) $\frac{x+y}{x-2} > 0$

2°) $x \neq 2$

D è aperto

$\partial D = \{y=-x, x=2\}$

$\partial D \cap D = \emptyset$



<u>Restrizioni</u> di alcune funzioni elementari.

$$\log x \longleftrightarrow x > 0$$

$$\sqrt{x} \longleftrightarrow x \geq 0$$

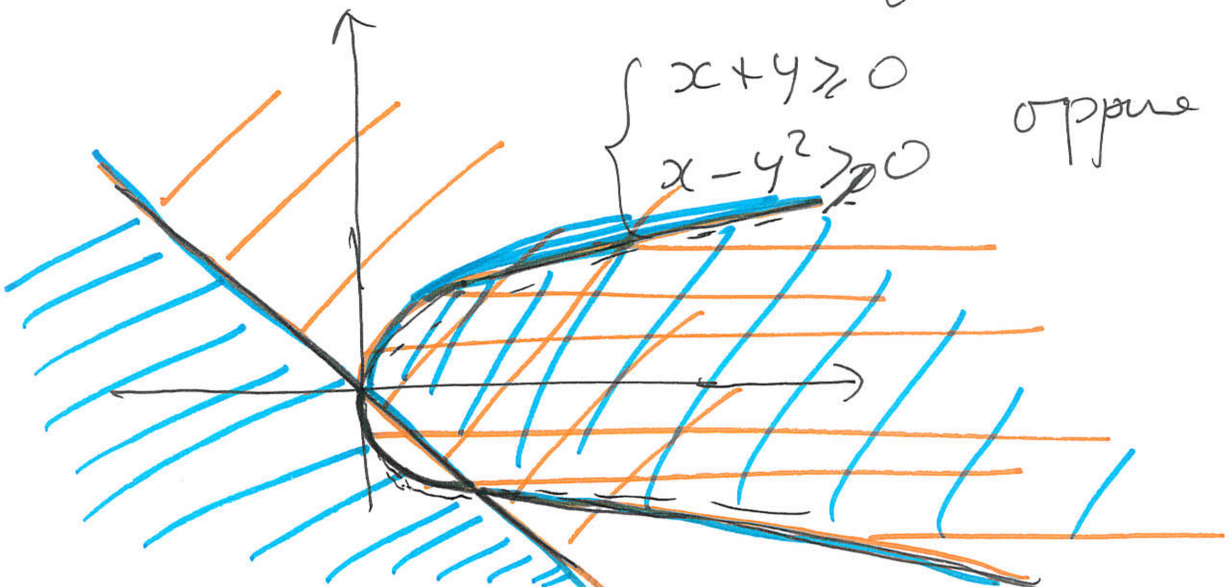
$$\frac{1}{x} \longleftrightarrow x \neq 0$$

$$\operatorname{tg} x \longleftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Sia $f(x,y) = \sqrt{(x+y)(x-y^2)}$. Trovare dominio.

$$D = \{(x,y) \text{ t.c. } (x+y)(x-y^2) \geq 0\} = \{\,\blacksquare\,\}$$

$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x+y \leq 0 \\ x-y^2 \leq 0 \end{cases}$$



$$x - y^2 = 0$$

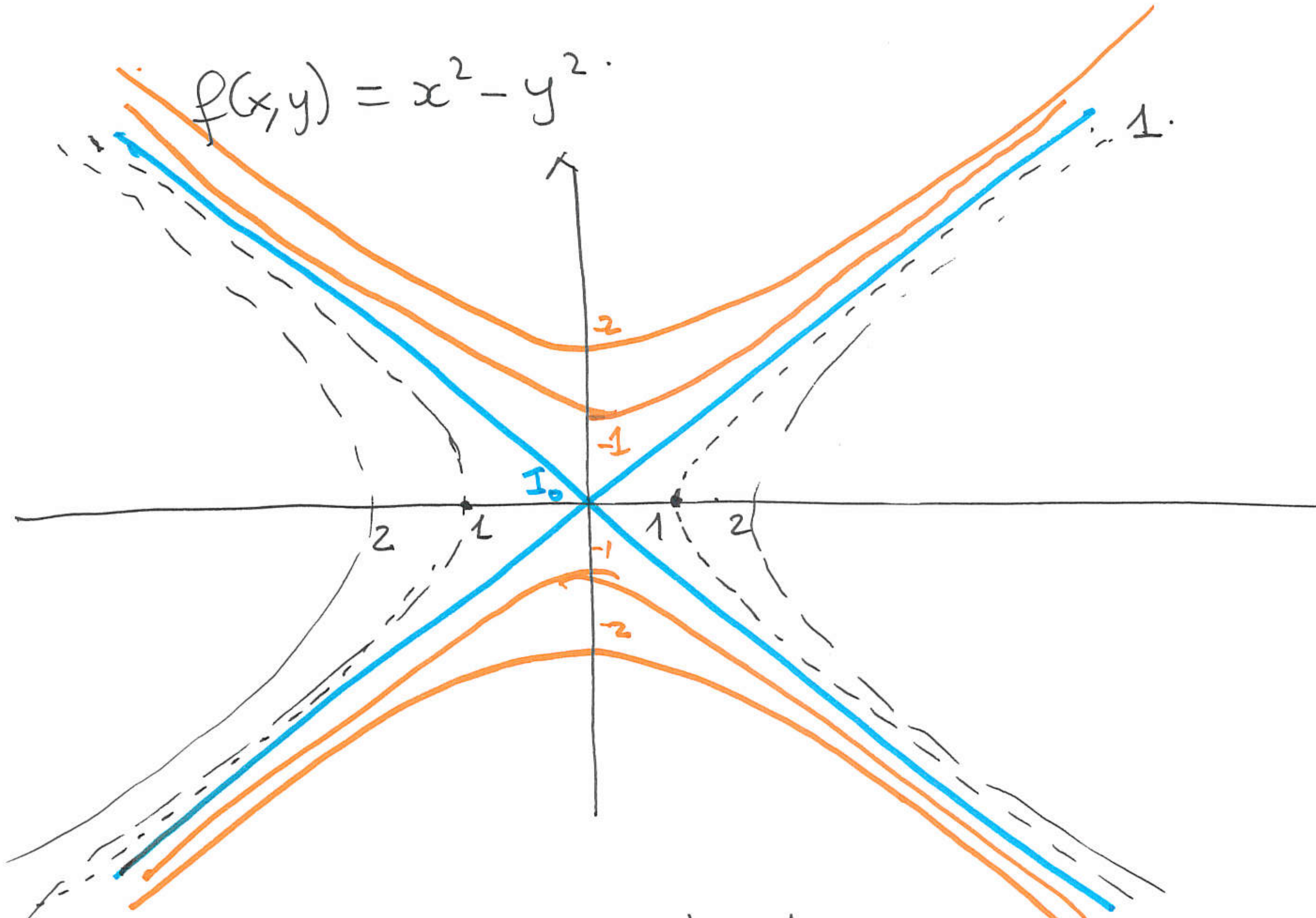
$$x = y^2$$

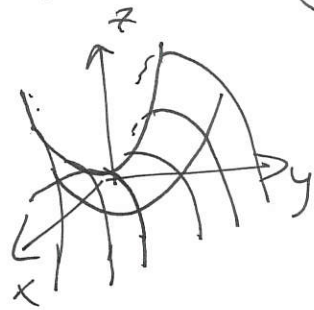
$$x \geq y^2$$

Insieme di livello

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \in D \longrightarrow f(x,y).$$

Insieme di livello "c" $\in \mathbb{R}$ $= \{(x,y) \in D \text{ t.c } f(x,y) = c\}$.





$I_1 = \{x^2 - y^2 = 1\}$
Iperbole.

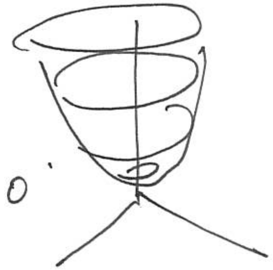
$I_{-1} = I_{-1} = \{x^2 - y^2 = -1\}$
$= \{y^2 - x^2 = 1\}$

$I_0 = \{(x,y) \text{ t.c. } f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \text{ t.c. } x^2 - y^2 = 0\}$

$x^2 = y^2$: $\boxed{x = y}$ $\boxed{x = -y}$

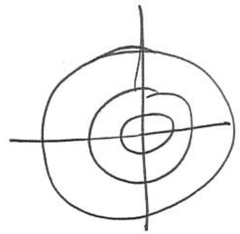
XI.

Se $f(x,y) = g(x^2+y^2)$, funzione radiale:
dove g è una funzione reale.



esempio
$\rightarrow$ 1) $f(x,y) = \cos(x^2+y^2) \rightarrow 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2) $f(x,y) = \operatorname{tg}(x^2+y^2) \rightarrow 0, 1, 10, -10$.

da svolgere a casa
3) $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$.



allora gli insiemi di livello?

$f(x,y) = c \quad \longmapsto \quad g(x^2+y^2) = c$

se possibile risolvo in "x^2+y^2"

$\boxed{x^2+y^2} = g^{-1}(c) = c_0$

$x^2+y^2 = c_0 \rightarrow$ cerchio di rag: $\sqrt{c_0}$.

Esempio: $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)} \longrightarrow \sqrt{1-\underbrace{(x^2+y^2)}} = c \geq 0$

$\Updownarrow$

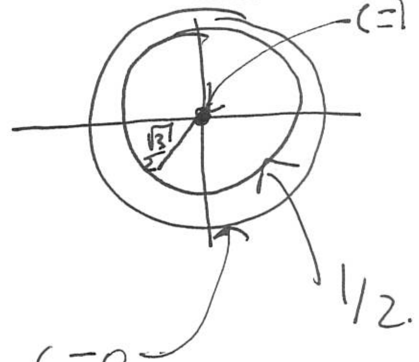
$1-(x^2+y^2) = c^2$

$\Updownarrow$

$-(x^2+y^2) = c^2-1$

$\boxed{(x^2+y^2) = -c^2+1} \geq 0$

grafico:



$c=1 \quad x^2+y^2=0$

XII

Esercizi da fare

$f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad c=0, \; c=1, \; c=-2.$

$f(x,y) = e^{xy}$ $\quad c=0, \; c=e, \; c=4$

$f(x,y) = \log(xy)$ $\quad c=-7, \; c=0, \; c=1.$

$$\boxed{f(x,y) = \frac{x+y}{2x-y} \longrightarrow \text{trovare \underline{dominio} e curve di livello:} \quad c=0, \; c=1, \; c=\frac{1}{2}.}$$

Trovare curve di livello di

$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, sapendo che $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.