Campi Vettoriali

mercoledì 16 dicembre 2020 14:05

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

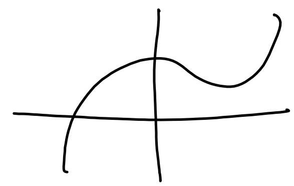


grafico:
(x, y)
$y = f(x)$
$x \in I$

$f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$(x_1, \dots, x_n) \to f(x_1, x_2, \dots x_n)$

$z = f(x_1, \dots, x_n)$

$N = 2$

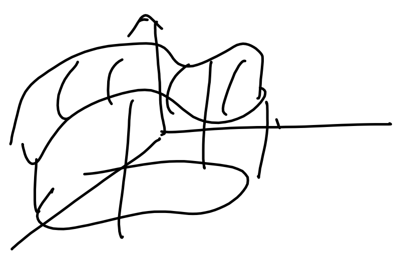
$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to f(x, y)$

$z = f(x, y)$ grafico

(x, y, z)

$(x, y) \in D$



Campi Vettoriali

$F : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dominio } D}}{(x_1, \dots, x_N)} \longrightarrow \underset{\substack{\parallel \\ \text{Im}.}}{(F_1(x_1, \dots, x_N), \dots, F_N(x_1, \dots, x_N))}$$

Ognuno di $F_1, \dots, F_N$ è una funzione

$$F(x_1, \dots, x_N) = \underbrace{\left(F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_1, \dots, x_N), \dots, F_N(x_1, \dots x_N)\right)}_{\text{Vettore}}$$

$N = 2$ o $N = 3$.

$\boxed{N=2}$ $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\underset{\underset{D}{\uparrow}}{(x,y)} \longrightarrow \left(F_1(x,y), F_2(x,y)\right) = \vec{F}(x,y)$$

Esempio (Matematico)

Data $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione reale

derivabile, cioè t.c. $\exists$ le derivate parziali in D

Il gradiente $\nabla f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale

$$(x,y) \longrightarrow \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

· Per esempio, $\boxed{f(x,y) = x e^{2xy}}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2xy} + 2xy e^{2xy}$

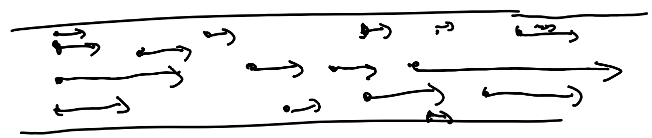
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{2xy} \cdot 2x$$

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{2xy}(1+2xy), 2x^2 e^{2xy}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

Esempio Campi Vettoriali in Fisica.

Campi di Velocità:



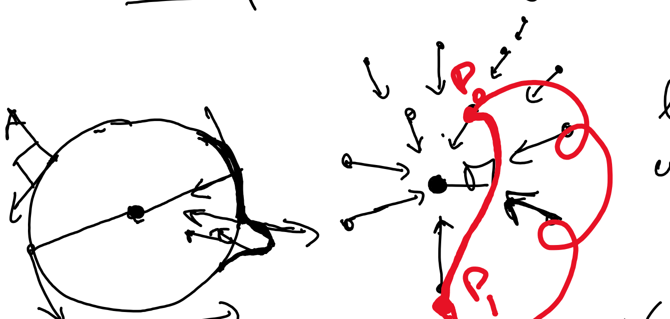
Fiume scorre

Ogni particella ha una velocità diversa, per esprimere la velocità possiamo usare un vettore, il vettore che ha verso e direzione dello spostamento e lunghezza l'intensità della velocità

Campi di Forza: Esempio Gravitazionale

In ogni punto si ha la Forza a cui è soggetta una particella di massa 1.

M è in $(0,0,0)$



$$\vec{F}(x,y,z) = +\frac{gM}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\left(-x, -y, -z\right)$$

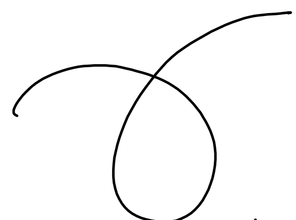
$$\boxed{\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-g\Pi x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-g\Pi y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-g\Pi z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)}$$

L'interesse di determinare un campo di forza è di calcolare il $\boxed{\text{lavoro}}$ cioè l'energia necessaria per trasportare una particella dal punto P_0 al punto P_1 lungo una traiettoria cioè lungo una curva.

Definizione di lavoro lungo una curva γ parametrizzata di un campo vettoriale $\vec{F}$.

Data $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longrightarrow (x(t), y(t))$



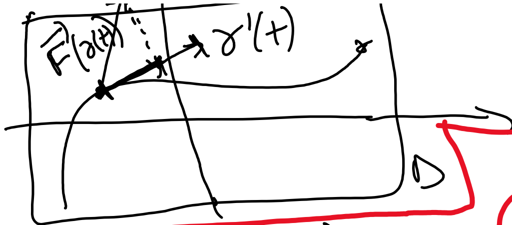
una curva regolare cioè

esiste $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ e $|\gamma'(t)| \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$

Dato campo vettoriale $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

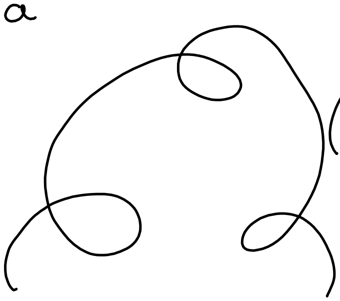
$(x,y) \in D \longrightarrow (F_1(x,y), F_2(x,y))$

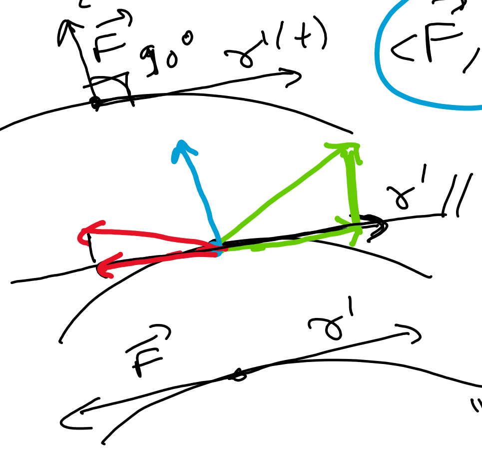
Se $\boxed{\gamma(t) \in D}$ $\forall t \in [a,b]$ allora



$$\boxed{L(\vec F,\gamma) = \int_a^b \vec F(x(t),y(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt}$$

$$= \int_a^b F_1(x(t),y(t))\,x'(t) + F_2(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$

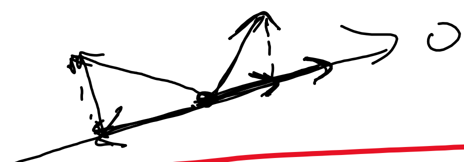




$\langle \vec F, \gamma' \rangle = 0$

$\gamma' \parallel \vec F \rightarrow$ "stesso verso" $\rightarrow \langle \vec F,\gamma'\rangle > 0$

$\langle \vec F,\gamma'\rangle < 0$ "verso è opposto"



Esempio

γ è il cerchio unitario percorso antiorario.

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad \boxed{t \in [0, 2\pi]}$$

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

$L(F, \gamma) = :$ Determine ...

$\underline{\gamma'(t)} = (-\sin t, \cos t)$

$x = \cos t$

$y = \sin t$

$$L(F,\gamma) = \int_0^{2\pi} \underline{\vec{F}(\gamma(t))} \cdot \underline{\gamma'(t)}\, dt$$

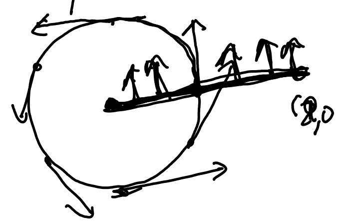
$$\vec{F}(\gamma(t)) = \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\right) =$$

dato che $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \underline{(-\sin t, \cos t)}$$

$$L(F,\gamma) = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t)}_{F_1} \underbrace{(-\sin t)}_{x'(t)} + \underbrace{(\cos t)}_{F_2} \cdot \underbrace{(\cos t)}_{y'(t)}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$



γ è una curva chiusa, $L(F,\gamma) = 2\pi \neq 0$

$\tilde{\gamma}(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 2]$

$\tilde{\gamma}'(t) = (1, 0)$

$\vec{F}(\tilde{\gamma}(t)) = \left(0, \frac{t}{t^2}\right)$

$\vec{F}(\tilde{\gamma}(t)) = \left(0, \frac{1}{t}\right)$

$$L(\vec F, \tilde\gamma) = \int_0^2 \langle \vec F(\tilde\gamma), \tilde\gamma' \rangle \, dt = \int_0^2 1\cdot 0 + 0\cdot \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \int_0^2 0\, dt = 0$$

<u>Definizione</u> $\vec F$, <u>campo vettoriale</u>, è <u>CONSERVATIVO</u> in D se esiste una funzione f derivabile in D, chiamata <u>Potenziale</u>, tale che $\underline{\vec F(x,y) = \nabla f(x,y)}$ $\forall (x,y) \in D$.

<u>Proposizione</u> Se $\vec F$ è <u>conservativo</u> allora il lavoro di $\vec F$ lungo una curva γ dipende solo dai punti iniziale e finale della curva γ. Cioè se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\vec F$ è conservativo

$$L(\vec F, \gamma) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

dove f: $\boxed{\vec F = \nabla f}$.

$\gamma(a) = \gamma(b)$ cioè se γ

In particolare se ... è chiusa allora $\boxed{L(\vec{F},\gamma)=0}$

$$\vec{F}(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

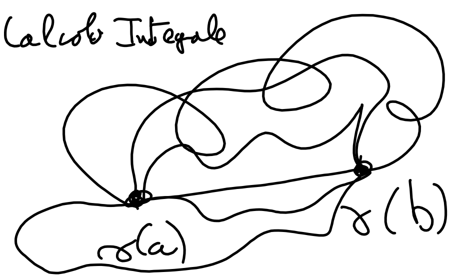
$$L(\vec{F},\gamma)\overset{\text{def.}}{=}\int_a^b \underline{\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\cdot x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\cdot y'(t)}\,dt$$

ma se $g(t)=f(x(t),y(t))$ è la restrizione di f alla curva $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ allora

$$g'(t)=\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\,x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\,y'(t)}$$

$$L(\vec{F},\gamma)=\int_a^b g'(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{T. F. del Calcolo Integrale}}}{=} g(b)-g(a)=f(x(b),y(b))-f(x(a),y(a))$$

$$=\underline{f(\gamma(b))-f(\gamma(a))}.$$



$\vec{F}=\left(-y \quad x\right)$ non è conservativo

OSS 1 $\vec{F} = \left(\frac{\quad}{x^2+y^2}, \frac{\quad}{x^2+y^2} \right)$

in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché se lo fosse allora il lavoro lungo una qualsiasi curva chiusa sarebbe nullo, invece $L(\vec{F}, \gamma) = 2\pi \neq 0$ quando $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ che è chiusa

Come fare per determinare se $\vec{F}$ è conservativo cioè per determinare se $\exists f$ t.c. $\vec{F} = \nabla f$?

OSS 2: Se $\vec{F}$ è conservativo cioè $\vec{F} = \nabla f$

$\vec{F} = (F_1, F_2)$ t.c. $F_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$

$F_2(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$

allora $\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}$ $\parallel$

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Per il Teo. di Schwarz le derivate miste sono indipendenti dall'ordine di derivazione

Se $\vec{F}$ è conservativo allora

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}} \quad (++)$$

Definizione: Se $\vec{F}$ verifica (++) allora diremo $\vec{F}$ è irrotazionale.

$\vec{F} = (F_1, F_2) \rightarrow$ Possiamo calcolare $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ e $\frac{\partial F_2}{\partial x}$

se $\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}}$ allora F è irrotazionale

Proposizione 2: Se $\vec{F}$ è conservativo in $D \Longrightarrow \vec{F}$ è irrotazionale

Corollario: Se F non è irrotazionale $\Longrightarrow$ F non è conservativo.

Se F non è irrotazionale inutile cercare un potenziale perché non esiste.

ATTENZIONE IN GENERALE IL VICEVERSA DELLA PROPOSIZIONE 2 NON È VERO

MA

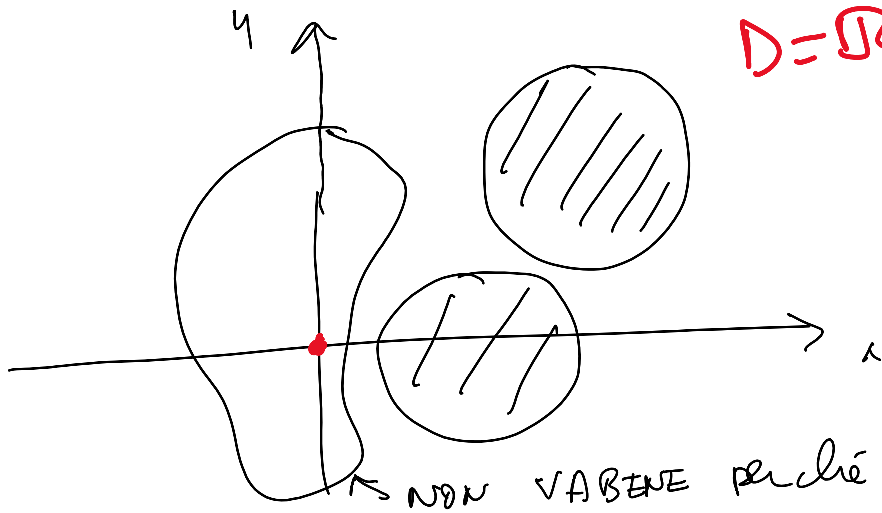
Proposizione 3: Se $\vec{F}$ è irrotazionale e D (dominio) è semplicemente connesso allora

D (dominio) è ...

$\vec{F}$ è conservativo.

Definizione D è semplicemente connesso se non ha "buchi" cioè se presa una qualsiasi curva chiusa contenuta in D allora la parte interna alla curva è tutta in D.

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



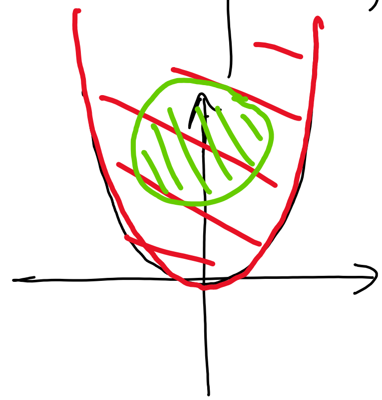
NON VA BENE perché $(0,0)$ è nell'interno della curva chiusa contenuta in D ma non appartiene a D. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso.

1°) $D = \{(x,y)$ t.c. $x>0, y>0\}$

è semplicemente connesso

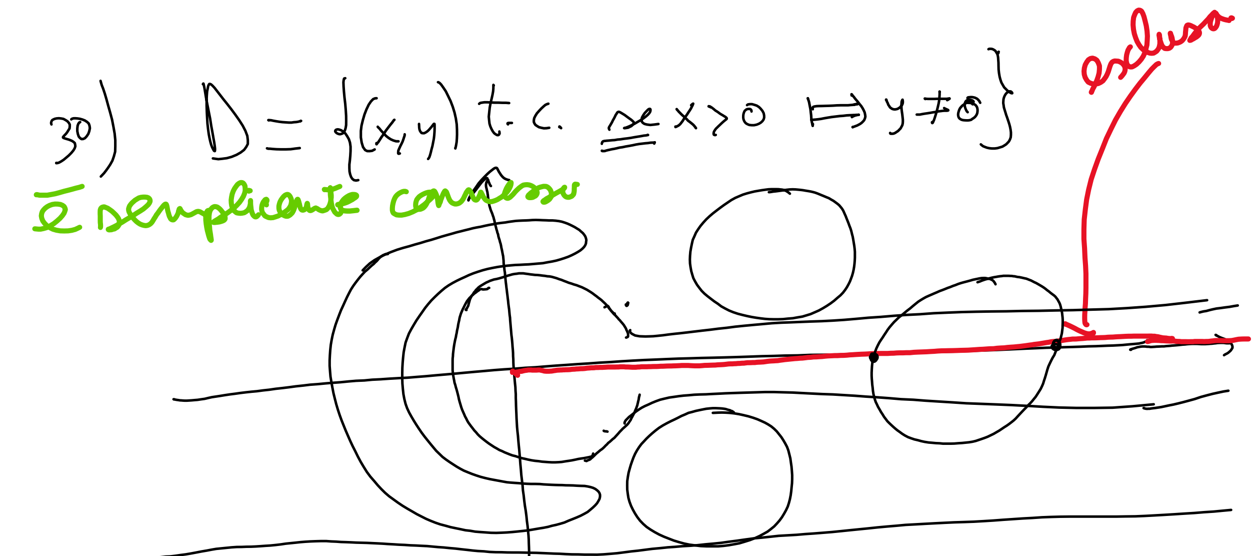
2°) $D = \{(x,y)$ t.c. $y \geq x^2\}$

è semplicemente connesso.

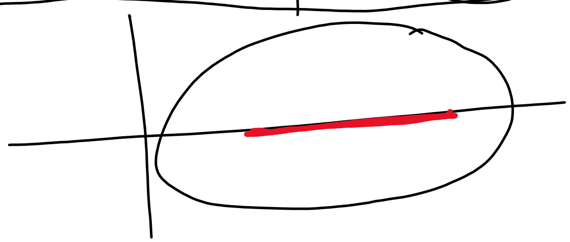


3°) $D = \{(x,y)$ t.c. se $x>0 \Rightarrow y \neq 0\}$

è semplicemente connesso



4°)



non è sempl. connesso

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

non è conservativo

F_1 F_2

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente

Domanda

F è irrotazionale?

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-1(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

$\boxed{F \text{ è } \underline{\text{irrotazionale}} \text{ ma non è } \underline{\text{conservativo}}}$

Esempio $F(x,y) = (x^2+y,\ x+e^y)$

? acc. Dom $\vec{F} = \mathbb{R}^2$

Domanda: F è conservativo. Oss.: ... quindi è semplicemente connesso.

Verifichiamo se F è irrotazionale cioè

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y) = 1\right.$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x+e^y) = 1\right.$$

quindi

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}} \Longrightarrow$$ F è irrotazionale

allora essendo il dominio semplicemente connesso

F è conservativo cioè esiste una funzione f

t.c. $F(x,y) = \nabla f(x,y)$.

Il potenziale è

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + e^y + xy$$

Infatti $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{3}x^2 + y = x^2 + y = F_1$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y + x = F_2$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y + x = F_2$

In generale, come si può trovare il potenziale?

Se io so che $\vec{F} = \nabla f$ allora

$$\begin{cases} F_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \\ F_2(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$ devo risolvere

per la derivata in x è una costante

costante

$$\begin{cases} x^2+y = \frac{\partial f}{\partial x} \to f(x,y) = \int x^2 + y \, dx = \frac{x^3}{3} + xy + \boxed{g(y)} \\ e^y + x = \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

quanto vale g(y)?

Usiamo la seconda equazione.

$$f(x,y) \longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \cancel{x} + g'(y) = e^y + \cancel{x}$$

$$\boxed{\frac{x^3}{3} + xy + g(y)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{g'(y) = e^y}$$

ma qui dove più essere nessuna x.

integrate

$$\Downarrow$$

$$\boxed{g(y) = e^y} \to \text{sost. in } f.$$

$$\boxed{f(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy + e^y}$$

$g(y)$

Es: $F(x,y) = \left(\cos x + xy, \frac{x^2}{2}\right)$ Dom $F = \mathbb{R}^2$ è sem. pl. connesso

Se F è irrotazionale $\Longrightarrow$ F è conservativo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x = \frac{\partial F_2}{\partial x} = x$$

F è conservativo, cerchiamo il potenziale che verifica

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x + xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow f(x,y) = \int \frac{x^2}{2}\, dy = \frac{x^2}{2} y + \overbrace{g(x)}^{\text{è una costante in } y}$$

$\rightarrow$ Usiamo la prima equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2} y + g(x)\right) = \underline{xy} + g'(x) = \cos x + \underline{xy}$$

$$\Downarrow$$

y è sparita! $\longrightarrow$ $g'(x) = \cos x$

$$\Downarrow$$

$g(x) = \sin x$

$$\boxed{f(x,y) = \frac{x^2}{2}y + \sin x}$$

è il potenziale