venerdì 11 dicembre 2020 11:10

Equazioni Differenziali del 2° ordine lineari

$$y'' + by' + cy = f(x) \quad , b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

$f(x)$ è continua

Visto: Il caso omogeneo cioè $f(x) \equiv 0$

$$(*) \quad y'' + by' + cy = 0 \qquad \forall b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

la soluzione esiste

Si trova usando il seguente metodo.

Si considera l'eq. caratteristica associata a $(*)$

$$\boxed{\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$$

1°) $\Delta = b^2 - 4c > 0 \longrightarrow \lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

L'insieme delle sol. è dato da

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad \forall C_1 \in \mathbb{R}, \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

$y(x) = \ \ ,$

2°) $\Delta = b^2 - 4c = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -\frac{b}{2}$

l'ins. delle sol. è dato da

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{b}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{b}{2}x} \quad \forall C_1 \in \mathbb{R}, \ \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

3°) $\Delta = b^2 - 4c < 0 \longrightarrow$ Le soluzioni dell'eq. caratteristica

sono complesse: $\lambda = -\frac{b}{2} \pm i \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}$ e se

ne deduce che l'ins. delle sol. dell'eq. diff.

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{b}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2} x\right) + C_2 e^{-\frac{b}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2} x\right)$$

$\forall C_1 \in \mathbb{R}, \ \forall C_2 \in \mathbb{R}.$

Consideriamo il caso $f(x) \not\equiv 0$ <u>NON OMOGENEO.</u>

$$y'' + by' + cy = f(x) \quad (*)$$

Verificato è che se y_P è una soluzione di $(*)$ e

$y'' + by' + cy = 0$

$y_0(x)$ è soluzione dell'equazione $y''+by'+cy=0$

allora $y(x) = y_p(x) + y_0(x)$ è soluzione di ⊕.

Quindi trovare tutte le soluzioni di ⊕ dobbiamo risolvere $y''+by'+cy=0$ e trovare una soluzione y_p.

SCOPO DELLA LEZIONE DI OGGI:

TROVARE LA SOLUZIONE PARTICOLARE con il metodo delle Somiglianze.

L'idea: "alcune funzioni non cambiano genere quando le derivo" (cioè), per esempio:

Es 1: $f(x) = e^{\alpha x} \longrightarrow f'(x) = \alpha e^{\alpha x} \longrightarrow f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$

Es 2: $f(x) = \sin \alpha x \longrightarrow f'(x) = \alpha \cos \alpha x \longrightarrow f'' = -\alpha^2 \sin \alpha x$

Es3: $f(x) = P_n(x)$ polinomio di grado n.

$f'(x) = P_{n-1}(x)$ ——— $n-1$

$f''(x) = P_{n-2}(x)$ ——— $n-2$.

Se $f(x)$ è una di queste funzioni cioè è exp., oppure $f(x)$ è una funzione trigonometrica ($\underline{\sin}$ o $\underline{\cos}$) oppure $f(x)$ è polinomio allora l'ipotesi è che la soluzione particolare sia dello <u>stesso tipo</u> di f.

<u>Caso dell'esponenziale</u>:

$$f(x) = e^{\alpha x}$$

$$\boxed{y'' + by' + cy = e^{\alpha x}}$$

$b=2,\ c=-3$

$f(x) = e^{2x}$ <u>Eq. data</u>

$\alpha = 2$

$$\boxed{y'' + 2y' - 3y = e^{2x}}$$

$y'' + by' + \dots$

la sol. particolare y_p sarà

f è un esponenziale $\rightarrow$ y_p sarà un esponenziale.

$$y_p(x) = a e^{\alpha x}$$

α è data dell'eq.

a è la nuova incognita.

$a \in \mathbb{R}$

$$y_p'(x) = a\alpha e^{\alpha x}$$

$$y_p''(x) = a\alpha^2 e^{\alpha x}$$

Inseriamo nell'eq. diff.

$$a\alpha^2 e^{\alpha x} + b\cdot(a\alpha e^{\alpha x}) + c(a e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{\alpha x} a(\alpha^2 + b\alpha + c) = e^{\alpha x} = 1\cdot e^{\alpha x}$$

Queste due funzioni sono uguali

$$a(\alpha^2 + b\alpha + c) = 1 \quad (*)$$

2° Passo: cerco y_p

1° Passo $y'' + 2y' - 3y \dots$

$$f(x) = e^{2x}$$

a? $\rightarrow$ Nuova incognita.

$$y_p(x) = a e^{2x}$$

Calcoliamo

$$y_p'(x) = 2ae^{2x}$$

$$y_p''(x) = 4ae^{2x}$$

$$4ae^{2x} + 2(2ae^{2x}) - 3(ae^{2x}) = e^{2x}$$

$$e^{2x}(5a) = e^{2x} \Longleftrightarrow 5a = 1$$

$$\Longrightarrow a = \frac{1}{5}$$ cioè

la funzione $y_p(x) = \frac{1}{5} e^{2x}$ è soluzione

$$\boxed{a = \frac{1}{\alpha^2 + b\alpha + c}}$$ o.k. se

$\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$

Se $\boxed{\alpha^2 + b\alpha + C = 0}$ allora

$(*) \Rightarrow 0 = 1$ che è impossibile

cioè $y_p(x) = a e^{\alpha x}$ non è una soluzione particolare di

$$y'' + by' + cy = e^{\alpha x}$$

perché è soluzione di

$$y'' + by' + Cy = 0.$$

In conclusione se $e^{\alpha x}$ è soluzione di $y'' + by' + Cy = 0$

particolare di

$$y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$$

Fatto

Le soluzioni dell'eq. omogenea

$y'' + 2y' - 3y = 0$

$y_0(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}$

Quindi l'unione delle soluzioni è data da

$$y(x) = \frac{1}{5} e^{2x} + C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}$$

$\forall C_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall C_2 \in \mathbb{R}$

Esempio:

$$y'' + y' - 2y = e^{x}$$

1°) Risolvo l'equazione omogenea: $y'' + y' - 2y = 0$

$\downarrow$ Eq. caratteristica

cioè se $\alpha = \lambda_1$ o $\alpha = \lambda_2$

sol. dell'eq caratteristica

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

In questo caso la soluzione è

$$\boxed{y_p(x) = a x e^{\alpha x}}$$

$$y_p'(x) = a e^{\alpha x} + a\alpha x e^{\alpha x}$$

$$y_p' = e^{\alpha x} a [1 + \alpha x]$$

$$y_p'' = \alpha e^{\alpha x} a + \alpha e^{\alpha x} a [1 + \alpha x]$$

$$y_p'' = e^{\alpha x} a [2\alpha + \alpha^2 x]$$

$$e^{\alpha x} a \left[2\alpha + \alpha^2 x + b(1 + \alpha x) + c x\right]$$

$$= e^{\alpha x} a \left[x(\alpha^2 + b\alpha + c) + 2\alpha + b\right]$$

eravamo nel caso $\boxed{\alpha^2 + b\alpha + c = 0}$ $\alpha = \lambda_1$ o $\alpha = \lambda_2$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$

$$\mapsto y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

2°) Soluzione particolare

$$f(x) = e^x \longrightarrow y_p = a e^x$$

ma $y_p(x) = a e^x$ è sol. dell'eq. omogenea quindi non può risolvere $y'' + y' - 2y = e^x$

quindi cambiare sol. particolare

$$\boxed{y_p(x) = a x e^x} \leftarrow \text{Diversa da } e^x \; P_1(x) e^x$$

$$y_p'(x) = a e^x + a x e^x$$

$$\boxed{y_p'(x) = e^x a (1 + x)} \to P_1(x) e^x$$

$$y_p''(x) = e^x a + e^x a (1 + x)$$

$\dots P(x) e^x$

$$= e^{\alpha x} a[2\alpha + b] = e^{\alpha x}$$

$$(y_p'' + b y_p' + c y_p = e^{\alpha x})$$

$$\boxed{a[2\alpha + b] = 1}$$ se $2\alpha + b \neq 0$

$$a = \frac{1}{2\alpha + b}$$

Se $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ e $\boxed{\alpha = -\frac{b}{2}}$

$\Downarrow$

(sol. particolare è $y_p(x) = a x^2 e^{\alpha x}$)

vuol dire che $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2}$

$$y_0(x) = \underbrace{c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x}}_{\text{sol. dell'omogenea}}$$

$$\boxed{y_p''(x) = e^x a(2+x)}$$

mettiamo nell'equazione

$$\underbrace{e^x a(2+x)}_{y''} + \underbrace{e^x a(1+x)}_{y'} - \underbrace{2axe^x}_{y} = e^x$$

$$e^x a[2 + \cancel{x} + 1 + \cancel{x} - 2\cancel{x}] = e^x$$

$$\underbrace{3a}_{P_0(x) = \text{cte}} e^x = \underbrace{e^x}_{\text{cte}} \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{3} x e^x$$

$\Rightarrow$ l'ins. delle sol.

$$y(x) = \frac{1}{3} x e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

$$\boxed{y_p(x) = a x^2 e^{\alpha x}}$$

$$y'' + by' + cy = e^{\alpha x}$$

Se $\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0 \longmapsto y_p = a e^{\alpha x}$

Se $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ e' $\alpha \neq -\frac{b}{2} \longmapsto y_p = a x e^{\alpha x}$

Se $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ e $\alpha = -\frac{b}{2} \longmapsto y_p = a x^2 e^{\alpha x}$

(1 solo soluzione reale)

2° CASO $f(x) = P_n(x) \longrightarrow P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$y'' + by' + cy = P_n(x)$ (*)

Siccome la derivata di un polinomio di grado

$y'' + y' - 2y = 3x$

$\boxed{f(x) = 3x} \longrightarrow$ polinomio di grado 1.

sol. dello stesso tipo.

Se $f(x) = P_n(x) \longrightarrow y_p = \varphi_n(x)$

anche y_p dovrà essere un polinomio di grado n.

$\rightarrow y_p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Cerchiamo $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ t.c. y_p verifica ⊛

$\rightarrow y_p' = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$

$\rightarrow y_p'' = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \dots + 2a_2$.

$y_p'' + by_p' + cy_p = \overbrace{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}^{f(x)}$

siccome f è di grado n $\longrightarrow b_n \neq 0$

$\underbrace{\dots\dots}_{\text{Termini di ordine inferiore a } x^n} + c\, a_n x^n = b_n x^n + \dots$

$$\begin{cases} \boxed{c a_n = b_n} \rightarrow \boxed{a_n = \frac{b_n}{c}} \\ \vdots \end{cases}$$

$\dots x^n + \dots + a_1 x + a_0$

$\rightarrow y_p(x) = a_1 x + a_0$ Calcoliamo a_1? e a_0?

$\rightarrow y_p'(x) = a_1$

$\rightarrow y_p''(x) = 0$

metto nell'equazione $y_p'' + y_p' - 2y_p = 3x$

$0 + a_1 - 2(a_1 x + a_0) = 3x$

$\boxed{-2a_1 x + a_1 - 2a_0} = 3x + 0$

polinomio di grado 1. polinomio di grado 1

coeff di x a sin. coeff di x a destra

$$\begin{cases} -2a_1 = 3 \\ a_1 - 2a_0 = 0 \end{cases}$$

$a_1 = -\frac{3}{2}$

$a_0 = \frac{a_1}{2} = -\frac{3}{4}$

$$\boxed{y_p = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}}$$

I due polinomi devono essere lo stesso polinomio.

Se $C \neq 0 \Rightarrow y_p = a_n x^n \ldots$

Se $C = 0 \Rightarrow y_p = \cancel{x}(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)$

$y_p = a_n x^{n+1} + \ldots + a_1 x^2 + a_0 x$

Esempio $\quad y'' + 3y' = 2x^2$

1°) $y'' + 3y' = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+3) = 0$

$\lambda = 0$

$\lambda = -3$

$y_0(x) = C_1 + C_2 e^{-3x}$

2°) Soluzione particolare: $f(x) = 2x^2$ è un polinomio di grado 2.

Se scegliessi $\cancel{y_p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$ ⟵

$\cancel{y_p'(x) = 2a_2 x + a_1}$

$\cancel{y_p''(x) = 2a_2}$ $\quad \ldots) = 2x^2$

$$y'' + 3y' = 2x^2 \Longrightarrow 2a_2 + 3(2a_2 x + a_1) = 2x^2$$

$$6a_2 x + 2a_2 + 3a_1 = 2x^2$$

IMPOSSIBILE

$$\boxed{y_p(x) = a_2 x^3 + a_1 x^2 + a_0 x}$$

$$y_p'(x) = 3a_2 x^2 + 2a_1 x + a_0$$

$$y_p''(x) = 6a_2 x + 2a_1$$

$$\Longrightarrow y_p'' + 3y_p' = 6a_2 x + 2a_1 + 3(3a_2 x^2 + 2a_1 x + a_0)$$

$$= 9a_2 x^2 + (6a_1 + 6a_2)x + 2a_1 + 3a_0$$

$$\| $$

$$2x^2 + 0x + 0 \quad \boxed{\text{O.K}}$$

Devo uguagliare i coef. dello stesso grado

$$\begin{cases} 9a_2 = 2 \longrightarrow \boxed{a_2 = \frac{2}{9}} \\ 6a_1 + 6a_2 = 0 \longrightarrow a_1 = -a_2 \longrightarrow \boxed{a_1 = -\frac{2}{9}} \\ 2a_1 + 3a_0 = 0 \longrightarrow a_0 = -\frac{2a_1}{3} \longrightarrow \boxed{a_0 = \frac{4}{27}} \end{cases}$$

$$\boxed{y_p(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{27}x}$$

L'insieme delle soluzioni $\boxed{y''+3y'=2x^2}$

$$y(x)=\frac{2}{9}x^3-\frac{2}{9}x^2+\frac{4}{27}x+C_1+C_2e^{-3x}$$

$\forall C_1 \in \mathbb{R}$
e $\forall C_2 \in \mathbb{R}$

Pb di Cauchy

$$\begin{cases} y''+3y'=2x^2 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $y(x)=\frac{2}{9}x^3-\frac{2}{9}x^2+\frac{4}{27}x+C_1+C_2e^{-3x}$ trovare quella che verifica $y(0)=0$ e $y'(0)=0$

Cerchiamo C_1 e C_2. $y(0)=C_1+C_2=0$

$$y'(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{4}{27}-3C_2e^{-3x} \Longrightarrow x=0$$

$$y'(0) = \frac{4}{27} - 3c_2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \frac{4}{27} - 3c_2 = 0 \end{cases}$$

$$c_2 = \frac{4}{27 \cdot 3} = \frac{4}{81}$$

$$c_1 = -c_2 = -\frac{4}{81}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{y(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{27}x - \frac{4}{81} + \frac{4}{81}e^{-3x}}$$

3° Caso: $f(x) = \sin \alpha x$

$$y'' + by' + cy = \sin \alpha x$$

(oppure $f(x) = \cos \alpha x$)

l'ipotesi: $y_p = a_1 \cos \alpha x + a_2 \sin \alpha x$,

$a_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 \in \mathbb{R}$?

$$y'' - 2y' - 3y = \sin(3x)$$

$$y_p(x) = a_1 \cos 3x + a_2 \sin 3x$$

le incognite sono a_1 e a_2.

$$y_p'(x) = -3a_1 \sin 3x + 3a_2 \cos 3x$$

$$y_p''(x) = -9a_1 \cos 3x - 9a_2 \sin 3x$$

metto nell'equazione:

$$(-9a_1 \cos 3x - 9a_2 \sin 3x) - 2(\underbrace{-3a_1 \sin 3x + 3a_2 \cos 3x}_{y'})$$

$$-3(a_1\cos 3x + a_2 \sin 3x) = -\sin 5x$$

$$(\cos 3x)\cdot[-9a_1 - 6a_2 - 3a_1] +$$

$$(\sin 3x)\cdot[-9a_2 + 6a_1 - 3a_2] = -\sin 3x + 0\cos 3x$$

la funzione a sinistra = la funzione a destra

$$\begin{cases} -9a_2 + 6a_1 - 3a_2 = -1 \\ -9a_1 - 6a_2 - 3a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a_1 - 12a_2 = -1 \\ -12a_1 - 6a_2 = 0 \end{cases}$$

$$a_2 = -\frac{12a_1}{6} = -2a_1$$

$$6a_1 + 24a_1 = -1$$

$$30a_1 = -1 \qquad a_1 = -\frac{1}{30}$$

$$a_2 = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{30}\cos 3x + \frac{1}{15}\sin 3x$$

L'insieme delle soluzioni è dato da

$$y(x) = -\frac{1}{30}\cos 3x + \frac{1}{15}\sin 3x + \underline{\underline{y_0(x)}}$$

$$y'' + 4y = \underline{\underline{\cos 2x}}$$

1°) $y'' + 4y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \longrightarrow \lambda^2 = -4$

$\lambda = \pm i\sqrt{4}$

$\lambda = \pm i \cdot 2$

$$y_0(x) = C_0 \underline{\underline{\cos 2x}} + C_1 \sin 2x \qquad \forall C_0 \in \mathbb{R}, \ \forall C_1 \in \mathbb{R}$$

2°) $y_p(x) = \underline{\underline{\cancel{a_0 \cos 2x} + a_1 \sin 2x}}$ non è possibile è soluzione $y'' + 4y = 0$

$$\Longrightarrow y_p(x) = \underbrace{a_0 x}\cos 2x + \underbrace{a_1 x}\sin 2x$$