mercoledì 9 dicembre 2020 14:11

Equazioni Differenziali del 2° ordine

$$y'' = F(x, y, y')$$ In generale

2° ordine lineari:

$$y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = f(x)$$

la parte della dipendenza in "y''", "y'" e "y" è lineare. Caso specifico in cui i coef. $b(x)$ e $c(x)$ sono costanti cioè

$$y'' + by' + cy = f(x) \quad \text{con } b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$$

1°) Caso $f(x) \equiv 0$, equazione omogenea

$$y'' + by' + cy = 0 \qquad (*)$$

$$y'' + by' + cy = 0 \quad (\ast)$$

Ipotizziamo che le soluzioni siano di tipo esponenziale cioè

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

("derivare" significa "moltiplicare")

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x)$$

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 y(x)$$

Inseriamo y, y' e y'' in $(\ast)$

$$\underbrace{\lambda^2 e^{\lambda x}}_{y''} + b\underbrace{\lambda e^{\lambda x}}_{y'} + c\underbrace{e^{\lambda x}}_{y} = 0$$

$$(\ast) \rightarrow e^{\lambda x}\left[\lambda^2 + b\lambda + c\right] = 0$$

$$e^{\lambda x} \neq 0 \ \forall x \longrightarrow \lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Se λ verifica $\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Longrightarrow y(x) = e^{\lambda x}$

verifica $y'' + by' + cy = 0$.

Quindi studiamo l'equazione algebrica associata o equazione caratteristica:

$\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

1° caso L'equazione ha due soluzioni reali, cioè $\Delta = b^2 - 4c > 0$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Cioè $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ è soluzione e

$y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ è soluzione di

$y'' + by' + cy = 0$ (+)

allora $\forall\, C_1$ e $C_2 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))$$

è soluzione di (+), infatti

calcoliamo

$$y'(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)$$
$$y''(x) = C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x)$$

. Mettiamolo nell'eq.

$$y'' + by' + cy = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + b(C_1 y_1' + C_2 y_2') + c(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$= C_1 \underbrace{[y_1'' + by_1' + cy_1]}_{\substack{\parallel \\ 0}} + C_2 \underbrace{[y_2'' + by_2' + cy_2]}_{\substack{\parallel \\ 0}} = 0$$

dato che y_1 e y_2 erano soluzioni di (+)

Confermando che $y(x)$ è soluzione $\forall C_1 \in \mathbb{R}, \forall C_2 \in \mathbb{R}$.

2° Caso Se $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ ha una soluzione reale.

cioè se $\Delta = b^2 - 4c = 0$ cioè $c = \frac{b^2}{4}$ cioè

$$\lambda^2+b\lambda+c=\lambda^2+b\lambda+\frac{b^2}{4}=\left(\lambda+\frac{b}{2}\right)^2=0$$

$$\boxed{\lambda=-\frac{b}{2}} \longrightarrow \underline{y_1(x)=e^{-\frac{b}{2}x}}$$

La seconda soluzione è data da

$$\underline{y_2(x)=xe^{-\frac{b}{2}x}}$$

Verifichiamo che $y_2(x)$ è soluzione dell'equazione nel caso $b^2=4c$ cioè $y_2'(x)=e^{-\frac{b}{2}x}+x\cdot e^{-\frac{b}{2}x}\cdot\left(-\frac{b}{2}\right)$

$$\left[y_2'(x)=e^{-\frac{b}{2}x}\left[1-\frac{b}{2}x\right] \longrightarrow y_2''(x)=-\frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}x}+\left[1-\frac{b}{2}x\right]e^{-\frac{b}{2}x}\left(-\frac{b}{2}\right)\right.$$

$$y_2''(x)=e^{-\frac{b}{2}x}\left[-b+\frac{b^2}{4}x\right]$$

$$y_2''+by_2'+cy_2=\underbrace{e^{-\frac{b}{2}x}\left[-b+\frac{b^2}{4}x\right]}_{y_2''}+b\cdot\underbrace{e^{-\frac{b}{2}x}\left[1-\frac{b}{2}x\right]}_{y_2'}+$$

$$+c\left(xe^{-\frac{b}{2}x}\right)=e^{-\frac{b}{2}x}\left[-b+\frac{b^2}{4}x+b-\frac{b^2}{2}x+\frac{b^2}{4}x\right]=0$$

y_2

e uso il fatto che $c = \frac{b^2}{4}$

Conclusione, facendo il conto di prima, si ha che $\forall C_1 \in \mathbb{R}$, $\forall C_2 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{b}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{b}{2}x}$$

è soluzione dell'equazione $y'' + by' + cy = 0$.

quando $b^2 - 4c = 0$ cioè $c = \frac{b^2}{4}$

3° Caso Quando $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ non ha soluzioni reali

cioè $b^2 - 4c < 0$.

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - \cancel{4}c}}{2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - \cancel{4}c}}{2}$$

Il problema è che $b^2 - 4c < 0$ e dunque non esiste la radice quadrata. Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale non sono di tipo esponenziale.

Esempio: $y'' + y = 0 \longmapsto \boxed{\lambda^2 + 1 = 0}$ cioè $\lambda^2 = -1$ IMPOSSIB.

$y'' + by' + cy = 0 \longrightarrow \lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$b = 0$ e $c = 1$

$\Delta = -4 < 0$

$\cancel{\lambda = \sqrt{-1}}$

$x = i \longrightarrow \lambda = 0 +$

$y'' = -y \longrightarrow \boxed{y_1(x) = \sin x} \longrightarrow y_1' = \cos x$

$\longrightarrow y_1'' = -\sin x = -y_1(x)$ quindi $y_1(x) = \sin x$ è soluzione

Analogamente $y_2(x) = \cos x \rightarrow y_2' = -\sin x$

$\longrightarrow y_2'' = -\cos x \Longrightarrow \boxed{y_2'' + y_2 = 0}$

$\longrightarrow y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ è soluzione di $y'' + y = 0$ $\forall C_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall C_2 \in \mathbb{R}$.

$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$b^2 - 4c < 0 \Longrightarrow \underbrace{(-1)}\underbrace{(4c - b^2)} < 0$

$4c - b^2 > 0$

$$\underbrace{\lambda = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}} = \underbrace{-\frac{b}{2}}_{\text{ben definito}} \pm \sqrt{-1}\, \underbrace{\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}}_{\text{ben definito}}$$

<u>Numeri complessi</u> : $\sqrt{-1} = i$ "numero immaginario"

$(i)^2 = -1$. allora

$$\lambda = \underbrace{-\frac{b}{2}}_{\text{parte reale}} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}}_{\text{parte immaginaria} \in \mathbb{R}}$$

è soluzione di $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

Questo permette di determinare <u>due</u> soluzioni dell'eq. $y'' + by' + cy = 0$:

$$y_1(x) = e^{-\frac{b}{2}x} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\, x\right)$$

$$y_2(x) = e^{-\frac{b}{2}x} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\, x\right)$$

sono soluz. di $y'' + by' + cy = 0$ quando $b^2 - 4c < 0$

$$\Longrightarrow \forall c_1 \in \mathbb{R}, \forall c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{b}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{b}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x\right)$$

Esempio: $y'' + 2y' + 10y = 0$

$\Downarrow$

Passiamo all'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2}$$ NON ESISTE

$\sqrt{-36} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{36} = i\sqrt{36}$

$$\longrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm i\sqrt{36}}{2} = -\frac{2}{2} \pm i\frac{\sqrt{36}}{2} = -1 \pm i\frac{6}{2}$$

$$= -1 \pm i\,3$$

Reale Im

dove "$i = \sqrt{-1}$"

exp Trig.

$\lambda^2+1=0$

$\lambda=-1$

$y''+y=0$

$y_1(x)=\sin x$

$y_2(x)=\cos x$

$\forall C_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall C_2 \in \mathbb{R}$

$y(x) = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x$

Algoritmo: $y''+by'+cy=0$ (+)

1° PASSO

$\lambda^2+b\lambda+c=0$ (++)

$b^2-4c>0$

2 soluzioni di (++)

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$b^2-4c=0$

1 sol. di (++)

λ_1

$b^2-4c<0$

0 soluzioni reali di (++)

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

scrivo la soluzione con i numeri complessi

$i = \sqrt{-1}$: $\boxed{x = \frac{-b}{2} \pm i \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}}$ → eq. alg.

$$y = c_1 e^{-\frac{b}{2}x} \cos\left(\underbrace{\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}}_{v_1} x\right) + c_2 e^{-\frac{b}{2}x} \sin\left(\underbrace{\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}}_{v_2} x\right)$$

$y'' + by' + cy = 0$

$\underline{b^2 - 4c < 0}$

$y(x) = e^{-\frac{b}{2}x} v(x)$ → Supponiamo che trovare $v(x)$?

$y'(x) = -\frac{b}{2} \cdot e^{-\frac{b}{2}x} v(x) + e^{-\frac{b}{2}x} v'$

$y''(x) = \frac{b^2}{4} e^{-\frac{b}{2}x} v(x) - b e^{-\frac{b}{2}x} v' + e^{-\frac{b}{2}x} v''$

$$y'' + by' + cy = e^{-\frac{b}{2}x}\left[v'' + v'(-b+b) + v\left[\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + c\right]\right]$$

$$= \underset{\neq 0}{e^{-\frac{b}{2}x}}\left[v'' + v\underbrace{\left[c - \frac{b^2}{4}\right]}\right] = 0$$

$$v'' + \left[\frac{4c-b^2}{4}\right] v = 0$$

$$v'' = -\underbrace{\boxed{\left[\frac{4c-b^2}{4}\right]}}_{>0} \cdot v$$

$$v_1(x) = \sin\sqrt{\frac{4c-b^2}{4}}\,x \rightarrow v_1'' = -\left[\frac{4c-b^2}{4}\right] v_1$$

$$v_2(x) = \cos\sqrt{\frac{4c-b^2}{4}}\,x \rightarrow v_2'' = -\left[\frac{4c-b^2}{4}\right] v_2$$

$$y'' = -y$$

$$\downarrow$$

$$y(x) = \sin x$$

$$y = \cos x$$

$$y'' = -ky \quad k>0$$

Esempi: $y'' + 2y' + y = 0$

$$\downarrow$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1}}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Una soluzione $\xrightarrow{2} \lambda_1 = -1$

$y_1 = e^{-x}$ e $y_2 = xe^{-x}$

$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \quad \forall C_1 \in \mathbb{R}$
$e \, \forall C_2 \in \mathbb{R}.$

Esempio: $y'' + 3y' = 0$

$\downarrow$ Eq. caratteristica.

$\lambda^2 + 3\lambda = 0 \longrightarrow \lambda(\lambda+3) = 0$

$\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -3 \Rightarrow y_1 = e^{0x} = 1$

$y_2 = e^{-3x}$

L'insieme delle soluzioni:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-3x} \quad \forall C_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \forall C_2 \in \mathbb{R}.$$

Esempio 3: $y'' + 9y = 0$ $\boxed{y'' = -9y = -3^2 y}$

$\downarrow$ Eq. Caratteristica

$\lambda^2 + 9 = 0$ non ha soluzioni reali.

$\sqrt{-1} = i$

$\lambda^2 = -9$

$\lambda = \pm\sqrt{-9} = \pm i\sqrt{9} = \pm i \cdot 3.$

$= 0 \pm i \cdot 3$

Parte reale $= \underline{\underline{0}}$

Parte Im $= \underline{\underline{3}}$

L'insieme delle soluzioni è dato da

$$y(x) = C_1 e^{0x} \cos 3x + C_2 e^{0x} \sin 3x \quad \forall C_1 \in \mathbb{R}, \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

$y(x) = y \dots$

Problema di Cauchy: per eq. del secondo ordine

$$\begin{cases} y'' = F(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

2 dati il valore della funzione all' istante $x_0 \to y(x_0)$
e il valore della derivata nello stesso istante x_0

Esempio

$$\begin{cases} y'' + 3y' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Si procede cercando l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale. In questo caso

$$\left(y(x) = C_1 + C_2 e^{-3x} \quad \forall C_1 \in \mathbb{R}, \ \forall C_2 \in \mathbb{R}.\right.$$

Tra tutte queste soluzioni cerchiamo quella che verifica $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$ cioè cerchiamo per quali valori di C_1 e C_2 è verificato $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.

<u>Calcoliamo</u>:

$$\xrightarrow[x=0]{} \quad y(0) = C_1 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 1$$

Calcoliamo $y'(x) = C_2 e^{-3x} \cdot (-3) = -3C_2 e^{-3x}$

$$\xrightarrow[x=0]{} \quad y'(0) = -3C_2 e^0 = -3C_2 = 2$$

$C_1 + C_2 = 1$

N.B.: Siamo contenti di ... 2 costanti

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -3C_2 = 2 \end{cases}$$

ovvero a disposizione 2 costanti C_1 e C_2 perché abbiamo 2 condizioni da soddisfare.

$C_2 = -\frac{2}{3} \longrightarrow C_1 = 1 - C_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

Quindi la soluzione del Pb. di Cauchy è la funzione $\boxed{y(x) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} e^{-3x}}$ che verifica tutte e 3 le equazioni del Pb di Cauchy.

<u>Es.</u> Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Risolvo prima l'equazione differenziale
$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

Eq. del secondo ordine, lineare, omogenea
quindi, troviamo l'equazione caratteristica
$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \qquad + +$$

Risolvo l'eq. algebrica
$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \neq \lambda_2 = \frac{-2-4}{2} = -\frac{6}{2} = -3.$$

$$\longrightarrow \boxed{y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}}$$ soluzione dell'eq. diff.
$\forall C_1 \in \mathbb{R}$
$\forall C_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=2 \end{cases}}$$ Dati del Pb. di Cauchy.

Usando l'espressione trovata, determinare C_1 e C_2 t.c. $y(0)=0$ e $y'(0)=2$!

Calcoliamo $y(0)=C_1e^0+C_2e^0=C_1+C_2$

Per calcolare $y'(0)$, prima calcoliamo $y'(x)=C_1e^x+C_2e^{-3x}\cdot(-3)$

$$y'(x)=C_1e^x-3C_2e^{-3x} \longrightarrow y'(0)=C_1-3C_2$$

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2=0 \\ y'(0)=C_1-3C_2=2 \end{cases}$$ Sistema di due eq. con due incognite.

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1-3C_2=2 \end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=-3-1=-4$$

$$\uparrow$$

$$c_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

La sol. è

$$\boxed{y(x) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_1} e^{x} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{c_2} e^{-3x}}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 3c_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow c_1 = -c_2$$

$$-c_2 - 3c_2 = 2$$

$$-4c_2 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$c_2 = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \longrightarrow c_1 = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = \underline{\underline{f(x)}} \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Equazione lineare del secondo ordine non omogenea se $f(x) \not\equiv 0$

appena vista.

<u>1° Passo</u>: $y'' + by' + cy = 0$

$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

La faremo venerdì

<u>2° Passo</u>: Si cerca <u>una</u> soluzione <u>particolare</u> $y'' + by' + cy = f(x)$

Chiamiamola $y_p(x)$

L'insieme delle soluzioni è dato da.

L'insieme delle soluzioni è

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x) \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)} \quad \forall C_1 \in \mathbb{R} \quad \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

Ora che conosciamo l'insieme delle soluzioni possiamo cercare la soluzione del Problema di Cauchy.

Esempio

$$(*) \begin{cases} \boxed{y'' + y = 1} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 1$$

1° Passo $\boxed{y'' + y = 0}$

$$y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$\forall C_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall C_2 \in \mathbb{R}$

2° Passo $\boxed{y_p(x) = 1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$y_p'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y_p''(x) \equiv 0}$$

$$\boxed{y_p'' + y_p = 0 + 1 = 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

L'insieme delle soluzioni di $y'' + y = 1$ è dato da

$$\boxed{y(x) = \underbrace{1}_{y_p} + \underbrace{C_1 \cos x + C_2 \sin x}_{y_0}} \quad \forall C_1 \in \mathbb{R} \; \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

Impongo i dati iniziali cioè $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

$$y(0) = 1 + C_1$$

$$y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \longrightarrow y'(0) = C_2$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 + C_1 = 0 \longrightarrow C_1 = -1 \\ y'(0) = C_2 = 1 \longrightarrow C_2 = 1 \end{cases}$$

La soluzione del Pb. di Cauchy è

$$\boxed{y(x) = 1 - \cos x + \sin x}$$

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x)$$
$$y'(x) = y_p'(x) + y_0'(x)$$
$$y''(x) = y_p''(x) + y_0''(x)$$

mettiamola in $y'' + by' + cy = f(x)$

$$y'' + by' + cy = \underbrace{y_p'' + y_0''}_{y''} + b\underbrace{(y_p' + y_0')}_{y'} + c(y_p + y_0)$$

$$= \underbrace{y_p'' + by_p' + cy_p}_{} + \underbrace{y_0'' + by_0' + cy_0}_{}$$

$$= \quad f(x) \quad + \quad 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y'' + by' + cy = f(x)}$$

Rimane da trovare un metodo per determinare la soluzione particolare, y_p. → Venerdì.