LEZIONE DEL 8 gennaio 2021 **CORREZIONE DEL SECONDO ESONERO BIANCO**

ESERCIZIO 1

venerdì 8 gennaio 2021 12:14

$y' = 2xy - x^3$ (eq 1)

a) $y(x) = \frac{x}{2}$ è soluzione? Calcolare

$\rightarrow y' = \frac{1}{2}$

$\rightarrow 2xy - x^3 = 2x \cdot \frac{x}{2} - x^3 = x^2 - x^3$

$\frac{1}{2} \neq x^2 - x^3$

funzione costante

Polinomio del Terzo Ordine

$y(x) = \frac{x}{2}$ non è soluzione

b) $y' = 2xy \rightarrow$ Trovare l'insieme delle s.d.

Eq. lineare omogenea a

$a(x) = 2x \longrightarrow A(x) = \int a(x)dx = \int 2x dx$

$A(x) = x^2$

$\ldots = C e^{A(x)} = C e^{x^2}$

$y(x) = ce \ldots$

c) $y' = 2xy - x^3$ eq. lineare, primo ordine.

$$y' = a(x)y + b(x)$$

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} \cdot b(x)\,dx$$

$$a(x) = 2x \longrightarrow A(x) = x^2$$

$$y(x) = e^{x^2} \int e^{-x^2} (-x^3)\,dx.$$

Calcoliamo
$$-\int e^{-x^2} x^3\,dx = \frac{1}{2} \int e^{-x^2} \cdot (x^2)(-2x)\,dx$$

$$t = -x^2 \rightarrow dt = -2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^t (-t)\,dt = -\frac{1}{2} \int e^t t\,dt = -\frac{1}{2} \left[te^t - \int e^t dt \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left[(-x^2) e^{-x^2} - e^{-x^2} \right] = e^{-x^2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \right] + C$$

$= -\frac{1}{2}\left[(-x)\ldots\right] \quad 2$

Mettendolo nella formula di risoluzione

$$y(x) = e^{x^2}\cdot\left[e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)+c\right] = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+Ce^{x^2}$$

L'insieme delle soluzioni al variare di $C \in \mathbb{R}$.

d) Se esiste una sol. che verifica $y(0)=1$.. (Cioè ricerca della soluzione del Pb. di Cauchy

$$(*) \begin{cases} y' = 2xy - x^3 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
)

$$y(0) = \frac{1}{2} + Ce^0 = \frac{1}{2} + C = 1 \implies \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

$\implies$ La funzione $y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{x^2}$ è soluz. di Pb. di Cauchy (*).

e) Sol. limitata. non ci sono. Se $C=0$

$$y(x) = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } x \to +\infty$$

$$y(x) = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+Ce^{x^2} \longrightarrow +\infty$$

$C \ldots C > 0$

se $C>0$ ... $\to -\infty$

se $C<0$ $\quad y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + Ce^{x^2} \to -\infty$

f) $y(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + Ce = 1 + Ce \to$ Non è vero se $C \neq e^{-1}$!

Domanda: $\exists$ $\boxed{\text{una}}$ soluzione che verifica contemporaneamente $y(1)=2$ e $y'(1)=3$?

$y(1) = 2 = 1 + Ce \implies Ce = 1 \implies C = e^{-1}$

$y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + e^{-1}e^{x^2} \implies y'(x) = x + e^{-1}e^{x^2} \cdot 2x$

$y'(1) = 1 + e^{-1}e^{1} \cdot 2 = 3$

$\boxed{\text{Es 2:}}$ $\quad y' = (x-1) \cdot \frac{(y^2-9)}{2y}$ $\quad$ Eq è definita per $y \neq 0$.

(Eq. a variabili separabili, $y' = f(x) \cdot g(y)$

$f(x) = x-1, \quad g(y) = \frac{y^2-9}{2y}$)

a) $\exists$ sol. costanti? $\quad \boxed{\begin{matrix} g(y_0) = 0 \\ y_0 \in \mathbb{R} \end{matrix}} \implies y(x) \equiv y_0$ è sol. dell'eq. diff.

$\boxed{y'(x) = 0}$ e $\boxed{f(x) \cdot g(y) = f(x) g(y_0) = 0}$

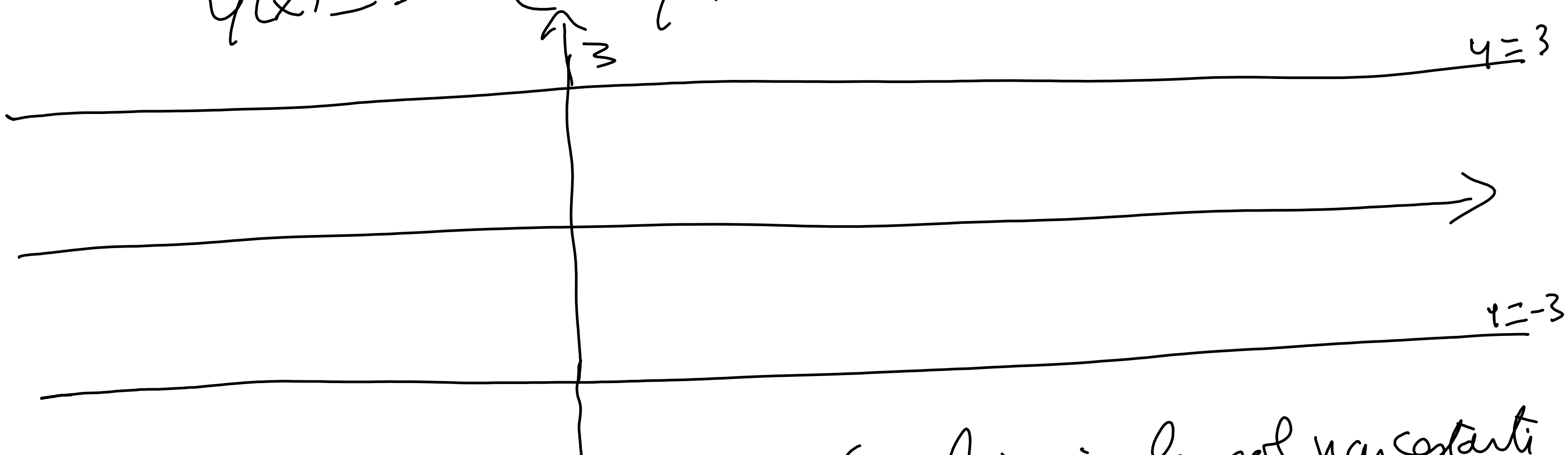
... costanti si impone ...

Per vedere se esistono soluzioni

$$g(y) = \frac{y^2-9}{2y} = 0 \Longleftrightarrow y^2-9=0 \Longleftrightarrow y=3 \text{ e } y=-3$$

Ci sono due soluzioni costanti:

$y(x)=3$ e $y(x)=-3$.



b) <u>L'unicità delle soluzioni.</u> Cerchiamo le sol. <u>non</u> costanti quindi possiamo supporre che $g(y)\neq 0$ e possiamo dividere per $g(y)$:

$$y' = (x-1)\left(\frac{y^2-9}{2y}\right) \longrightarrow \frac{2yy'}{y^2-9} = (x-1)$$

$$\longrightarrow \int \frac{2y(x)}{y^2-9}\, \underbrace{y'(x)dx} = \int (x-1)\, dx$$

$$\int_{y(x)} dy$$

$$y=y(x) \rightarrow dy = y'(x)\,dx$$

$$\frac{x^2}{2}-x+C=\int \frac{2y}{y^2-9}\,dy = \log|y^2-9|$$

$$\boxed{\int \frac{f'}{f}=\log|f|}$$

$$(y^2-9)'=2y$$

Arrivati eq. (non è più differenziale, $y=y(x)$)

$$\boxed{\log|y(x)^2-9|=\frac{x^2}{2}-x+C}$$

Risolvere questa equazione.

$$|y^2(x)-9|=e^{\frac{x^2}{2}-x+C}=e^Ce^{\frac{x^2}{2}-x}$$

generica costante positiva $e^C>0$

$-e^C<0$ gen. cost. neg.

$$y^2-9=e^Ce^{\frac{x^2}{2}-x}$$

$\rightarrow$ se $y^2-9>0 \Longrightarrow y^2-9=e^Ce^{\frac{x^2}{2}-x}$

$\rightarrow$ se $y^2-9<0 \Longrightarrow y^2-9=-e^Ce^{\frac{x^2}{2}-x}$

$$y^2-9=C_1e^{\frac{x^2}{2}-x} \Longrightarrow y^2=9+C_1e^{\frac{x^2}{2}-x}$$

$$y(x)=\sqrt{9+C_1 e^{\frac{x^2}{2}-x}} \qquad \forall C_1\in\mathbb{R}$$

$$y(x)=-\sqrt{9+C_1 e^{\frac{x^2}{2}-x}} \qquad \forall C_1\in\mathbb{R}$$

purché esista la $\sqrt{9+Ce^{\frac{x^2}{2}-x}}$

$$\underline{y(x)\equiv 3} \qquad \underline{y(x)\equiv -3}$$

c) Trovare la soluzione che verifica

$$\boxed{y(1)=1} \longrightarrow y(x)=\sqrt{9+C_1 e^{\frac{x^2}{2}-x}}$$

$$y(1)=\sqrt{9+C_1 e^{-\frac{1}{2}}}=1$$

(l'incognita è C_1).

$$\longrightarrow 9+C_1 e^{-\frac{1}{2}}=1^2=1$$

$$e^{-\frac{1}{2}}C_1=1-9=-8 \implies C_1=-8e^{\frac{1}{2}}<0$$

$$\boxed{y(x)=\sqrt{9-8e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{x^2}{2}-x}}}$$

L'intervallo di esistenza della soluzione si tratta ... della funzione $f(x)=\sqrt{9-8e^{\cdots}}$

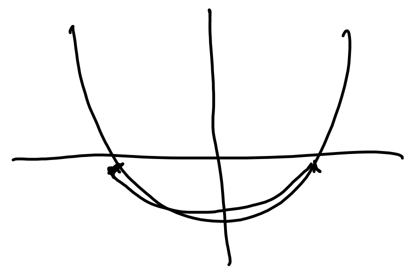
dell'intervallo di esistenza ...
che contenga 1.

$$9 - 8e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}-x} \geq 0$$

$$\frac{9}{8} \geq e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}-x} = e^{\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \leq \log\left(\frac{9}{8}\right) \iff x^2 - 2x + 1 - 2\log\left(\frac{9}{8}\right) \leq 0$$



$$x^2 - 2x + 1 = 2\log\left(\frac{9}{8}\right)$$

$$(x-1)^2 = 2\log\left(\frac{9}{8}\right)$$

$$(x-1) = \pm\sqrt{2\log\left(\frac{9}{8}\right)}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2\log\left(\frac{9}{8}\right)}$$

$$y(x) = \sqrt{9 - 8e^{\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}}}$$ è definito per

$$x \in \left[1 - \sqrt{2\log\left(\frac{9}{8}\right)},\ 1 + \sqrt{2\log\left(\frac{9}{8}\right)}\right] \ni 1.$$

$x \in [1-\sqrt{2\log(8)}$ ...

è l'intervallo di esistenza della soluzione.

Tuttavia, agli estremi dell'intervallo la $\sqrt{}$ si annullo, ora l'eq. non era definita per $y=0$ quindi

$y(x)=\sqrt{9-8e^{\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}}}$ è soluzione in

$$I=\left(1-\sqrt{2\log\left(\frac{9}{8}\right)},\ 1+\sqrt{2\log\left(\frac{9}{8}\right)}\right)$$

d) Se nell'intervallo $(0,3)$ esistono delle soluzioni limitate.

se $x\in(0,3) \longrightarrow y(x)=\sqrt{9+c_1e^{\frac{x^2}{2}-x}}$

se esiste allora è limitata perché è limitato

$e^{\frac{x^2}{2}-x}$ in $[0,3]$ è limitato in $(0,3)$

$\longrightarrow$ stessa cosa per

$y(x) = -\sqrt{9+c_1e^{\frac{x^2}{2}-x}}$

$y(x) = -\sqrt{\ldots}$

$\longrightarrow$ le soluzioni costante sono per forza limitate.

e) Per $x \in [4, +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{9 + C_1 e^{\frac{x^2}{2} - x}} = +\infty$$

con $C_1 > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} -\sqrt{9 + C_1 e^{\frac{x^2}{2} - x}} = -\infty$$

con $C_1 > 0$

Le uniche soluzioni limitate sono le soluzioni costanti $y(x) \equiv 3$, $y(x) \equiv -3$.

$y(x)$ è limitata se esiste $M > 0$ t.c. $|y(x)| < M$ $\forall x \in (0, 3)$

$$-M < y(x) < M$$

$y(x)$ non tende a $+\infty$: