venerdì 4 dicembre 2020 11:24

Equazioni Differenziali del 1° Ordine

Equazioni Lineari:

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)}$$

Se $b(x) \not\equiv 0$ allora non si tratta di un'equazione a variabili separabili.

1°) $b(x) \equiv 0$, eq. lineare omogenea è a Variabili Separabili

$y' = a(x)\,y$ dove $a(x)$ è una funzione continua.

- $y(x) \equiv 0$
- $y \neq 0$ $\quad \frac{y'}{y} = a(x) \longrightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int a(x)\,dx$

$$\boxed{A(x) = \int a(x)\,dx}$$

$y = y(x) \longrightarrow dy = y'(x)dx$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \log|y|$$

$\log|y| = A(x) + c \implies |y| = e^{A(x)+c} = e^c e^{A(x)}$

$\{y(x) \equiv 0$

Se $y(x) > 0 \implies y(x) = e^c e^{A(x)}$

Se $y(x) < 0 \implies y(x) = -e^c e^{A(x)}$

$$\Longleftrightarrow \boxed{y(x) = c_0 e^{A(x)}} \quad \boxed{\forall\, c_0 \in \mathbb{R}.}$$

Se $c_0 > 0 \longrightarrow$ ..

Se $c_0 < 0 \longrightarrow$ ...

Se $C_0 > 0 \to \dots$

Se $C_0 < 0 \to \dots$

Se $C_0 = 0 \to \bullet$

Tutte le soluzioni dell'equazione
$$y'(x) = a(x)\,y(x)$$
si ottengono fissando una primitiva di $a(x) \to A(x) = \int a(x)\,dx$
$$\boxed{y(x) = C_0\, e^{A(x)}} \quad \forall\, C_0 \in \mathbb{R}.$$

Esempio $\quad y' = (\cos x)\,y \qquad a(x) = \cos x$

$$\int \cos x\,dx = A(x) = \sin x \longrightarrow \boxed{y(x) = C_0 e^{\sin x}}$$

$$y' = \underbrace{C_0 e^{\sin x}}_{y} \cdot \cos x = (\cos x) \cdot y.$$

$\forall\, C_0 \in \mathbb{R}$

Se avete $\begin{cases} y' = (\cos x)\,y \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \end{cases} \longrightarrow y(x) = C_0 e^{\sin x}$

Tra tutte le soluzione cerco quella che verifica
$$y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 2 \iff y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = C_0 e^{\sin\frac{\pi}{2}} = C_0 e = 2$$
$$C_0 = \frac{2}{e} = 2 \cdot e^{-1}$$

Trovato la costante C_0 tale che y verifichi ... $e^{\sin x}$ ... $2 e^{-1} e^{\sin x}$

Trovato la costante C_0 tale che y verifichi ...
iniziale $\Longmapsto$ $\boxed{y(x)=\frac{2}{e}e^{\sin x}}=2e^{-1}e^{\sin x}$
$=2e^{-1+\sin x}$

Soluzione del pb di Cauchy

- Eq. lineare del prim'ordine non omogenea

$$y'=a(x)y+b(x) \qquad \text{con } b(x)\not\equiv 0$$

Es. $y'=y+3x$ oppure $y'=xy+x^2$

(1° Passo) $\longrightarrow$ Risolvere l'eq. omogenea
cioè $y'=a(x)y \longrightarrow y_0(x)=C_0\,e^{A(x)}$
dove $A(x)=\int a(x)dx$

(2° Passo) Variazione della Costante: L'ipotesi

$$y(x)=C(x)\,e^{A(x)}$$

è che la soluzione sia di questo tipo.
La nuova incognita è $c(x)$.

Metto $y \rightarrow y'=a(x)y+b(x)$ e vediamo
cosa risolve $c(x)$. Se $\boxed{y(x)=c(x)\cdot e^{A(x)}}$

$A'(x)=a(x)$

$$y'=c'(x)e^{A(x)}+c(x)e^{A(x)}\cdot a(x)$$

$$\underbrace{c'(x)e^{A(x)}+\boxed{c(x)e^{A(x)}\cdot a(x)}}_{y'}=\boxed{a(x)\cdot \underbrace{c(x)e^{A(x)}}_{y}}+b(x)$$

$\Downarrow$

$c'(x)=e^{-A(x)}b(x)$

y'

$$\Downarrow$$

$$c'(x)\,e^{A(x)} = b(x) \Longleftrightarrow c'(x) = e^{-A(x)} b(x)$$

$$c(x) = \int e^{-A(x)} b(x)\,dx + C_0$$

Quindi abbiamo trovato:

$$y(x) = \left(\int e^{-A(x)} b(x)\,dx + C_0\right) e^{A(x)}$$

$$\boxed{y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} \cdot b(x)\,dx + \underbrace{C_0\, e^{A(x)}}_{=y_0}} \quad \forall C_0 \in \mathbb{R}$$

Questa è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $y' = a(x)y + b(x)$ con $A(x) = \int a(x)\,dx$.

$$y(x) = \underbrace{e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\,dx}_{\text{soluzione particolare}} + \underbrace{y_0(x)}_{\text{sol. omogenea.}}$$

Esempio

$$\begin{cases} y' = y + x \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \text{Pb. di Cauchy}$$

$$y' = y + x \longrightarrow y' = a(x)y + b(x)$$

con $a(x) = 1$ e $b(x) = x$

$$\Downarrow$$

$$A(x) = x$$

(*) $$y(x) = e^{x} \cdot \underbrace{\int e^{-x} \cdot x\,dx} + C_0\, e^{x}.$$

(*) $y(x) = C \cdot \int \ldots$

$$\int \underbrace{e^{-x}}_{g'} \cdot \underbrace{x}_{f}\, dx = -e^{-x} \cdot x + \int e^{-x}\, dx = -e^{-x} x - e^{-x}$$

(*) $\rightarrow$ $$y(x) = e^{x}\left[-e^{-x} \cdot x - e^{-x}\right] + C_0 e^{x}$$

(+) $$\boxed{y(x) = -x - 1 + C_0 e^{x}} \quad \forall C_0 \in \mathbb{R}$$

$$y' = y + x$$

Verifichiamolo: Calcolare y', mettere l'espressione di y' e di y nell'equazione.

derivando (+) ottengo

$$y' = -1 + C_0 e^{x}$$

$$\underbrace{-1 + C_0 e^{x}}_{y'} \overset{?}{=} \underbrace{-x - 1 + C_0 e^{x}}_{y} + x = -1 + C_0 e^{x}$$

Vero

(+) $y(x) = \underline{-x-1} + \underline{C_0 e^{x}} \quad \forall C_0 \in \mathbb{R}$

soluzione particolare viene dalla presenza di $b(x)$.

soluzione omogenea $y' = y$

(*) $\begin{cases} y' = y + x \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ Tra tutte le soluzioni (+) scelgo quella t.c. $y(1) = 1$.

Calcolo $y(1)$ usando (+) : $y(1) = -1 - 1 + C_0 e^{1} = -2 + C_0 e$

$-2 + C_0 e = 1$

Calcolo $y(1)$ usando

Impongo $y(1)=1 \Longrightarrow -2+C_0 e = 1$

cioè trovare C_0

$$C_0 e = 1+2=3$$

$$C_0 = 3e^{-1}$$

quindi $y(x) = -x-1+3e^{-1}e^{x} = -x-1+3e^{x-1}$

soluzione del problema di Cauchy (*)

$$y'(x) = 3y + x^2$$

Cerco una soluzione particolare usando questo ragionamento: la derivata di un polinomio è un polinomio di grado inferiore

$$y' - 3y = \underbrace{x^2}_{\text{polinomio}}$$

Una soluzione possibile è $y(x) = ax^2+bx+c$

$$y' = 2ax+b$$

$$y'-3y = \underbrace{2ax+b}_{y'} - 3\underbrace{(ax^2+bx+c)}_{y} = x^2$$

$$= -3ax^2 + x(2a-3b) + b - 3c = x^2$$

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ 2a-3b=0 \\ b-3c=0 \end{cases}$$

$a = -\frac{1}{3}$

$3b = 2a = -\frac{2}{3} \to b = -\frac{2}{9}$

$3c = b \Longrightarrow c = \frac{b}{3} = -\frac{2}{27}$

$y(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}$ è una soluzione di $y' = 3y + x^2$

è una soluzione particolare.

è una soluzione particolare.

Risolvo $\boxed{y' = 3y} \longrightarrow a(x) = 3 \rightarrow A(x) = 3x$

$$\boxed{y_0(x) = C_0 e^{3x}}$$

l'insieme delle soluzioni di $y' = 3y + x^2$

$$\boxed{y(x) = \underbrace{-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}}_{\text{sol. particolare}} + \underbrace{C_0 e^{3x}}_{\text{sol. omog.}}} \quad \boxed{\forall C_0 \in \mathbb{R}}$$

Esercizio Risolvere $y' = 3y + x^2$ con la formula

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\,dx + C_0 e^{A(x)}$$

$A(x) = 3x$

$$\boxed{y(x) = e^{3x} \int \underbrace{e^{-3x} \cdot x^2\,dx} + C_0 e^{3x}}$$

CODICE OPIS: RHNFMZ85

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{2x}{x^2+1}\,y + \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$f(x) \cdot g(y)$

Risolvere l'insieme delle soluzioni ... che

Risolvere l'insieme delle soluzioni

$$y' = \frac{-2x}{x^2+1} y + \cos x. \quad \Big)$$ det. di che tipo $\left\langle \begin{array}{l} \text{V.S.} \\ \text{LIN.} \end{array} \right.$

è del tipo $y' = a(x)y + b(x)$ dove $b(x) = \cos x$, $a(x) = -\dfrac{2x}{x^2+1}$

Calcoliamo:

$$\int a(x)dx = A(x) = \int \frac{-2x}{x^2+1} dx = -\int \frac{1}{t} dt = -\log|t|$$

$$t = x^2+1 \qquad dt = 2x\,dx$$

$$= -\log|x^2+1| = -\log(x^2+1). \qquad \Big(y(x) = C(x)\, e^{-\log(x^2+1)} \text{ Variaz. della costante} \Big)$$

$$\boxed{y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\,dx + C_0\, e^{A(x)}}$$

Cioè $y(x) = e^{-\log(x^2+1)} \displaystyle\int e^{\log(x^2+1)} \cos x\,dx + C_0\, e^{-\log(x^2+1)}$

Calcoliamo:

$$\int e^{\log(x^2+1)} \cos x\,dx = \int \underbrace{(x^2+1)}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'}\,dx =$$

$$= (x^2+1)\sin x - \int 2x \cdot \sin x\,dx = (x^2+1)\sin x + 2x\cos x - \int 2\cos x\,dx$$

$$= (x^2+1)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x = (x^2-1)\sin x + 2x\cos x.$$

Calcoliamo

$$e^{-\log(x^2+1)} = e^{\log(x^2+1)^{-1}} = (x^2+1)^{-1} = \frac{1}{x^2+1}$$

attenzione $e^{\pm\log}$

$$e^{\dots} = e^{\dots} = (x^2+1)^{-1} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\|$$

$$\frac{1}{e^{\log(x^2+1)}} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\boxed{(a\log b) = \log b^a}$$

$$\log a + \log b = \log(ab)$$

quindi in conclusione

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{x^2+1}\left((x^2-1)\sin x + 2x\cos x\right) + \frac{c_0}{x^2+1} \quad \forall c_0 \in \mathbb{R}}$$

è l'unione delle soluzioni di $y' = \frac{-2x}{x^2+1}y + \cos x$

Per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{2x}{x^2+1}y + \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Trovare tra tutte le soluzioni dell'eq. differenziale quella che verifica $y(0) = 1$.

$$y(0) = 1\left((0^2-1)\sin 0 + 2\times 0 \times \cos 0\right) + \frac{c_0}{0^2+1} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$c_0 = 1$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{x^2+1}\left((x^2-1)\sin x + 2x\cos x\right) + \frac{1}{x^2+1}}$$

LA SOL. del Pb. di Cauchy.

$y' = a(x)y(x) + b(x)$

$$y' = xy + x$$

$\to$ eq. lineare $y' = a(x)y + b(x)$ con $a(x) = x$ e $b(x) = x$

$\to$ V. separabili $y' = x(y+1)$

$y' = f(x) \cdot g(y)$

con $f(x) = x$, $g(y) = y+1$

°) $y+1 = 0 \Longrightarrow y = -1 \to y(x) = -1$ sol. costante

°°) $\dfrac{y'}{y+1} = x \longrightarrow \displaystyle\int \frac{y'(x)\,dx}{y(x)+1} = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$

$$\int \frac{y'}{y+1}\,dx = \int_{y=y(x)} \frac{dy}{y+1} = \log|y+1|$$

$$\log|y+1| = \frac{x^2}{2} + c \Longrightarrow |y+1| = e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^c e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{cases} y+1 = e^c e^{\frac{x^2}{2}} \quad (*) & \text{se } y+1 > 0 \\ y+1 = -e^c e^{\frac{x^2}{2}} \quad (**) & \text{se } y+1 < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{y = -1 + c_0 e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$\forall c_0 \in \mathbb{R}$

$\to c_0 = 0 \to y \equiv -1$

$\to c_0 > 0 \to c_0 = e^c$ $(*)$

$\to c_0 < 0 \to c_0 = -e^c$ $(**)$

$y(x) = -1$ è soluzione

Abbiamo trovato che $y(x)=-1$ è soluzione

$\Longrightarrow y(x) = \underbrace{-1}_{\text{sol. part}} + \underbrace{y_0(x)}_{\text{sol. omog.}}$ siccome l'eq. è lineare

Eq. omog. $\boxed{y' = xy} \longrightarrow a(x) = x \to A(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\boxed{y_0(x) = c_0 e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\boxed{y(x) = -1 + c_0 e^{\frac{x^2}{2}}} \quad \forall c_0 \in \mathbb{R}$$

$$y'(x) = xy + x$$

$a(x) = x \Rightarrow A(x) = \frac{x^2}{2}$

$b(x) = x$

$$\underline{e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\,dx}$$

$$y(x) = \underline{e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} x\,dx} + c_0 e^{\frac{x^2}{2}}$$

Calcoliamo

$$\underline{\int e^{-\frac{x^2}{2}} x\,dx} = -\int e^t\,dt = -e^t = -e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\boxed{t = -\frac{x^2}{2}} \longrightarrow dt = -x\,dx \to -dt = x\,dx$

Sostituiamo

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + c_0 e^{\frac{x^2}{2}} = -1 + c_0 e^{\frac{x^2}{2}} \quad \forall c_0 \in \mathbb{R}$$

$y' = f(x) g(y)$ $\to g(y) = 0$

$\to \int \frac{y'}{g(y)}\,dx$

$y' = f(x)\, g(y) \rightarrow \int \frac{y'}{g(y)}\,dx = \int f(x)\,dx$

$y' = a(x)\cdot y \longrightarrow y(x) = c_0\, e^{A(x)}$

$y(x) = -1 + c_0\, e^{\frac{x^2}{2}}$ è soluzione?

Verificare sostituendo nell'equazione.

$y'(x) = c_0\, e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x$

$y' = xy + x$

$\underbrace{c_0\, e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x}_{y'} = x\cdot\big(\underbrace{-1 + c_0\, e^{\frac{x^2}{2}}}_{y}\big) + x =$

$= -x + x\cdot c_0\, e^{\frac{x^2}{2}} + x = x\, c_0\, e^{\frac{x^2}{2}}$

VERO.