

Primo foglio di Esercizi di Matematica, 05/06  
prof. I. Birindelli

1. Dimostrare la seguente proposizione:  
Se  $A \subset B$  allora  $A \cap B = A$ .
2. Dimostrare che  $\sqrt{3}$  è un numero irrazionale.
3. Determinare l'insieme dei numeri interi tali che  $n^2 - m^2 = 72$ .
4. Al variare di  $a \in \mathbb{R}$ , determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

$$i) \frac{x-2}{x+1} \leq \frac{2x+1}{x-3}, \quad ii) ax+4 > x+1$$

$$iii) \sqrt{x-2} \geq -1 \text{ (attenzione!)}, \quad iv) -\frac{1}{2} < \sin(2x + \frac{\pi}{2}) < \frac{1}{2}$$

5. Risolvere le seguenti equazioni:

$$|2x-1| = x+1, \quad |x+2| + |x-1| = |x-2|.$$

6. Sia  $T$  un triangolo che ha un lato coincidente con il diametro di un cerchio e avente un vertice  $A$  sul cerchio. Dimostrare che  $T$  è un triangolo rettangolo.

(Suggerimento: Disegnare la figura, dividere il triangolo in due triangoli tracciando il raggio dal centro del cerchio ad  $A$ . Dimostrare prima che questi due triangoli sono isosceli. Ricordarsi dunque che la somma degli angoli di un triangolo è  $\pi$  e che l'angolo piatto è  $\pi$ .)

7. Dati i punti  $A = (1, 0)$  e  $B = (-2, 0)$ . Determinare e disegnare l'insieme dei punti  $P = (x, y)$  del piano tali che  $d(A, P) = 4 - d(B, P)$ .
8. Siano  $A = (1, 2)$ ,  $B, C = (3, -1)$  e  $D$  i vertici di un parallelogramma tale che  $d(A, B) = 1$  e  $B$  appartiene all'asse delle  $y$ . Determinare le coordinate di  $B$  e  $D$ .
9. Siano  $A = (1, 2)$ ,  $B, C = (3, -1)$  e  $D$  i vertici di un rettangolo tale che  $d(A, B) = 1$ . Determinare le coordinate di  $B$  e  $D$ .
10. Siano  $A = (0, 1)$ ,  $B = (0, y)$  e  $C$  i vertici di un triangolo tale che  $d(A, C) = 3$  e l'angolo  $ABC = \frac{\pi}{6}$  e  $BAC = \frac{\pi}{3}$ . Determinare le coordinate di  $B$  e  $C$ .
11. Ricordando che  $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ , calcolare  $\sin(\frac{\pi}{12})$ .