

Foglio di esercizi sulle matrici. I. Birindelli

1. Dati i vettori $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare se sono linearmente indipendenti. Fissato $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, determinare, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\vec{v} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.$$

2. Determinare il rango delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare il rango di A e il rango di B .

3. Determinare per quali valori di k la seguente matrice ha rango 3.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & k & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare se esistono soluzioni del problema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 2x - \alpha y + z = 3 \end{cases}$$