Esercizio 2.11 *Sia* $[0, 2\pi] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$ *l'elica di equazioni parametriche* $C(t) = (\cos t, \sin t, t)$. *Calcolare l'integrale*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{2.2}$$

dove $\vec{F} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

In termini equivalenti, calcolare l'integrale

$$\int_C F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz \tag{2.3}$$

sulla curva C *della forme differenziale* $\omega = F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$.

Esercizio 2.12 *Sia* $\vec{F}$ *un campo vettoriale piano costante (cioè del tipo* $\vec{F} = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath}$, *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*) e sia* $[a, b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2$ *una curva chiusa di classe* C^1. *Dimostrare che*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{2.4}$$

Esercizio 2.13 *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^3$. *Dimostrare che*

a) *per ogni campo scalare* $\Omega \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ *di classe* C^2 *su* Ω *si ha:*

$$\text{rot } \nabla\varphi = 0$$

b) *per ogni campo vettoriale* $\Omega \xrightarrow{\boldsymbol{F}} \mathbb{R}^3$ *di classe* C^1 *su* Ω *si ha:*

$$\boldsymbol{F} \textit{ è conservativo} \Rightarrow \boldsymbol{F} \textit{ è irrotazionale.}$$

Esercizio 2.14 *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^3$. *Dimostrare che per ogni campo vettoriale* $\Omega \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^3$ *di classe* C^2 *su* Ω *si ha:*

$$\text{div rot } \Phi = 0$$

Esercizio 2.15 *Il campo vettoriale* $\vec{F} = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ *è il rotore di un altro campo vettoriale?*

Esercizio 2.16 *Sia* $\vec{F}$ *un campo vettoriale di classe* $C^1(U)$, U *aperto di* $\mathbb{R}^3$, *e sia* S *una superficie chiusa tutta contenuta in* U. *Dimostrare che*

$$\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 0 \tag{2.5}$$

Lo si dimostri in due modi: a) usando il teorema della divergenza; b) usando il teorema del rotore.

Esercizio 2.17 *Una funzione* f *di classe* $C^2(U)$, U *aperto di* $I\!R^3$, *si dice* armonica *se soddisfa l'equazione*

$$\text{div } \nabla f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0 \tag{2.6}$$

detta equazione di Laplace*. Se si scrive* $\nabla\cdot$ *al posto di* div *, l'equazione di Laplace si scrive simbolicamente*

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = 0 \tag{2.7}$$

dove $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ *è detto* operatore di Laplace *o* laplaciano*.*

Poniamo $r = r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$*. Dimostrare che la funzione (di tre variabili)* $\frac{1}{r}$ *è armonica.*

Esercizio 2.18 *Dimostrare che per ogni superficie chiusa* S *contenuta in* U *e per ogni funzione armonica* f *in* U*,*

$$\int_S \nabla f \cdot \vec{n}\, dS = 0 \tag{2.8}$$

Esercizio 2.19 *Sia*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r^n}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$*,* $n \in \mathbb{R}$*. Dimostrare che l'unico* n *per il quale* div $\mathbf{F} = 0$ *è* $n = 3$*. (Ad esempio, è il caso del campo gravitazionale o del campo elettrico).*

Esercizio 2.20 *Sia* S *la superficie costituita dalla semisfera superiore* S_1 *di centro l'origine e raggio* a *e dal disco* S_2*, sul piano* x, y*, di centro l'origine e raggio* a*. Sia* $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$*. Verificare il teorema della divergenza. (Cioè, calcolare l'integrale della divergenza e il flusso, e verificare che sono uguali).*

Esercizio 2.21 *Siano* S_1*,* S_2 *due superfici chiuse. Supponiamo che* S_2 *sia tutta contenuta all'interno di* S_1 *e sia* V *la regione di spazio compresa tra di esse. Sia* $\mathbf{F}$ *un campo vettoriale tale che* div $\mathbf{F} = 0$ *in* V*. Fissiamo su* S_1 *e su* S_2 *l'orientazione* $\mathbf{n}$ *uscente. Dimostrare che*

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\; dS = \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\; dS \tag{2.9}$$

Esercizio 2.22 *Sia* $\mathbf{F}$ *il campo vettoriale radiale che in ogni punto* $P = (x, y, z)$ *punta lontano dall'origine, con intensità* $\frac{1}{r^2}$*, dove* $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$*.*

1. *Determinare il dominio* D *di* $\mathbf{F}$*.* D *è connesso? è semplicemente connesso?*

2. $\mathbf{F}$ *è solenoidale? è irrotazionale? è conservativo?*

3. *Calcolare il flusso di* $\mathbf{F}$ *attraverso la sfera di centro l'origine e raggio* a*. Il fatto che tale flusso non sia nullo, contraddice il teorema della divergenza? Spiegare.*

4. *Dimostrare che il flusso attraverso una qualunque superficie chiusa, orientata con la normale uscente, vale zero se la superficie non contiene l'origine al suo interno, mentre vale* 4π *se la contiene.*

5. *Determinare il lavoro compiuto da* $\mathbf{F}$ *lungo la curva* $C = C_1 \cup C_2$ *percorsa in senso antiorario a partire da* $(1, 0, 1)$*, dove* C_1*,* C_2 *sono gli archi di parabola contenuti nel piano* $z = 1$ *di equazioni* $y = 1 - x^2$ *e* $y = -1 + x^2$ $(-1 \leq x \leq 1)$*.*

6. *Dimostrare che non esiste alcun campo vettoriale* $\mathbf{G}$ *in* $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ *tale che* rot $\mathbf{G} = \mathbf{F}$*.*