Limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \qquad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \qquad \forall \alpha>0, \quad \forall a>1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}^{x} = e} \implies \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \\ &\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \\ &\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \end{aligned}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to\pm\infty} \log\underbrace{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}_{\downarrow \atop e} = \log e = 1$$

$\uparrow$ la continuità del Logaritmo

$$y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y}$$

$$x \to 0 \implies y \to +\infty \text{ oppure } y \to -\infty$$

$$\frac{e^x - 1 \to 0}{x \to 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &e^x - 1 = y \implies e^x = y+1 \implies x = \log(y+1) \\ &x\to 0 \implies y \to 0 \end{aligned}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(y+1)} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(1+y)} \cdot \quad \log(1$$

$$y = (1+x)^\alpha - 1 \implies y+1 = (1+x)^\alpha \implies \log(y+1) = \alpha\log(1+x)$$

$$x\to 0 \iff y \to 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}}$$

$$y=(1+x)^\alpha-1 \implies y+1=(x+1)^\alpha \implies \log(y+1)=\alpha\log(1+x)$$

$$\simeq \alpha x$$

$$1 \longleftarrow \boxed{\frac{\log(y+1)}{y}} = \frac{\alpha\log(1+x)}{(1+x)^\alpha-1} = \boxed{\boxed{\frac{x}{(1+x)^\alpha-1}}\cdot\alpha\cdot\boxed{\frac{\log(1+x)}{x}}} \to 1$$

"idea"

conosco

$\frac{x}{(1+x)^\alpha-1} \downarrow \ell$ cerco

$\frac{\log(1+x)}{x} \downarrow 1$

$$\boxed{\ell\cdot\alpha\cdot 1}=1 \iff \ell=\frac{1}{\alpha}$$

- unicità del limite
- prodotto dei limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{(1+x)^\alpha-1}}=\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}=\alpha$$

$$\boxed{\log(y+1)=\alpha\log(x+1)}$$

$$\log(x+1)\sim x$$

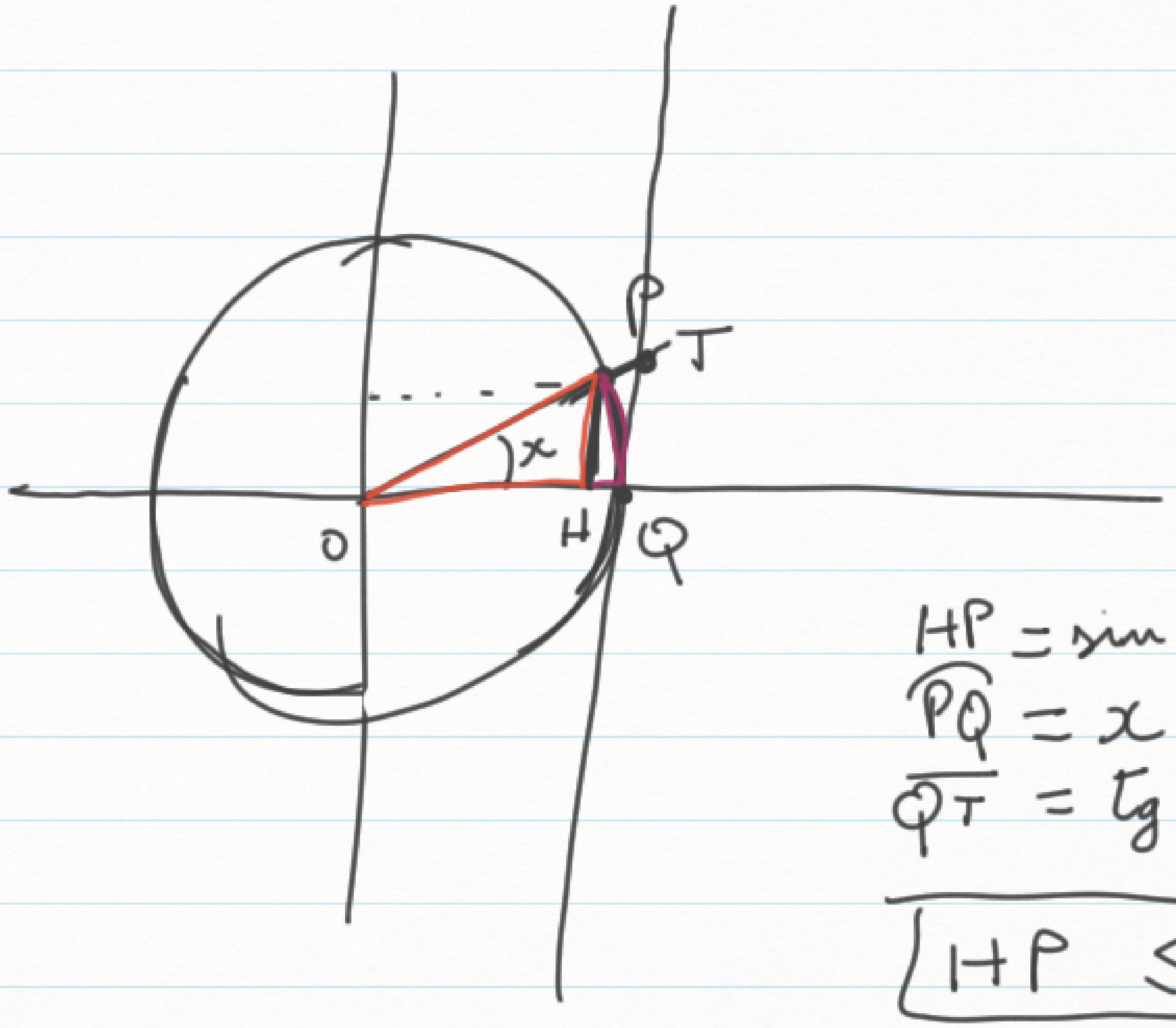
$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}\approx\frac{y}{\frac{\log(y+1)}{\alpha}}\longrightarrow\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}=\alpha$$

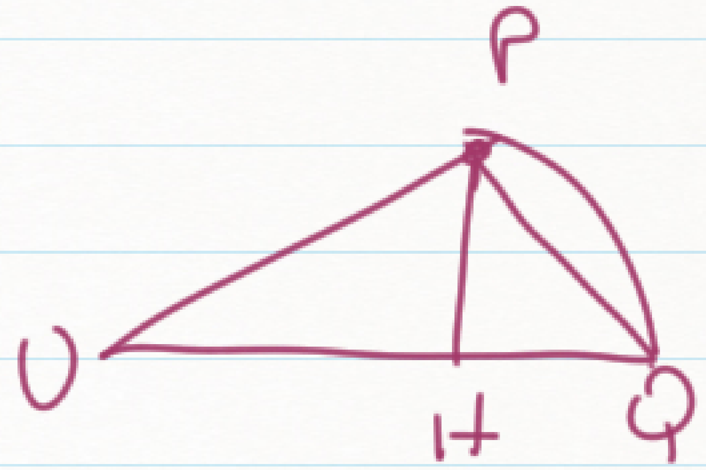
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha}$$

$$(1+x)^\alpha-1\simeq\alpha x$$

$$(1+x)^\alpha\simeq\alpha x+1$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$





$HP = \sin x$

$\overset{\frown}{PQ} = x$

$QT = tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\boxed{HP \leq \overset{\frown}{PQ} \leq QT}$$

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\boxed{1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}} \qquad x > 0$$

$$1 \qquad\qquad 1$$

$\frac{\sin x \cdot 1}{2}$ = Triangolo (O P Q) $\subset$ Settore circolare (O P Q) $\subset$ Triangolo (O T Q)

$$A(\text{Triangolo } OPQ) = \boxed{\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{tg\, x}{2}}$$

Area settore circolare $\left(\frac{x}{2} r^2\right)$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\underline{\sin^2 x}=\underline{1-\cos^2 x}$$

$$\boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\,(1+\cos x)}=\frac{(1-\cos^2 x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\boxed{\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\overbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}^{1}\cdot 3$$

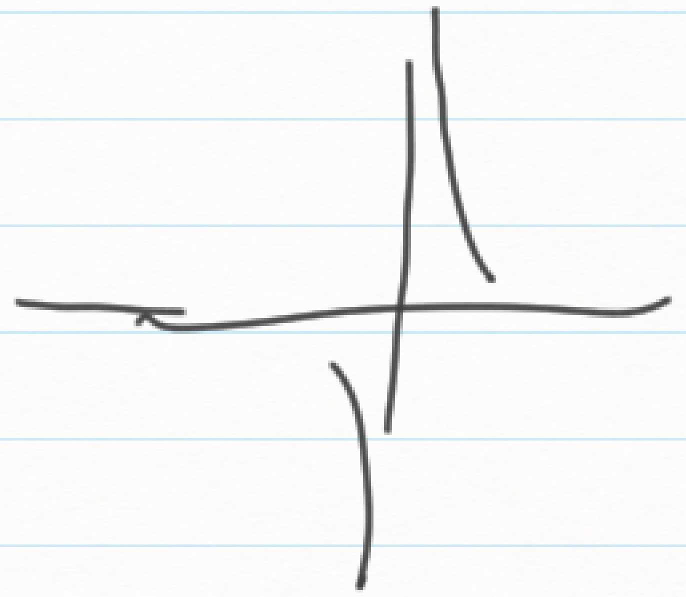
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\,\mathrm{tg}\,x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\mathrm{tg}\,x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\boxed{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{3x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1}\cdot\frac{3}{x}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{1-\cos x}}_{2}$$

<u>non esiste</u>

$\frac{3}{x}$: $-\infty$ ($x\to0^-$), $+\infty$ ($x\to0^+$)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 3x}{1-\cos x}=+\infty \qquad \lim_{x\to0^-}\frac{\sin 3x}{1-\cos x}=-\infty$$



Funzioni continue in un intervallo:

Teorema di esistenza degli zeri Sia f una funzione continua in $[a, b]$

osservare che l'intervallo è chiuso e limitato

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Se $f(a)f(b) < 0 \implies \exists\, x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) = 0$

Dim. $f(a) \cdot f(b) < 0$ $\quad c_1 = \frac{a+b}{2}$ $\quad$ calcoliamo $f(c_1)$ $\quad$ se $f(c_1) = 0$ finito

COstruiamo una successione di intervalli nel modo seguente

Primo intervallo

$\boxed{f(a)f(c_1) < 0}$ — $[a_1, b_1]$ $\to$ $a_1 = a$, $b_1 = c_1$

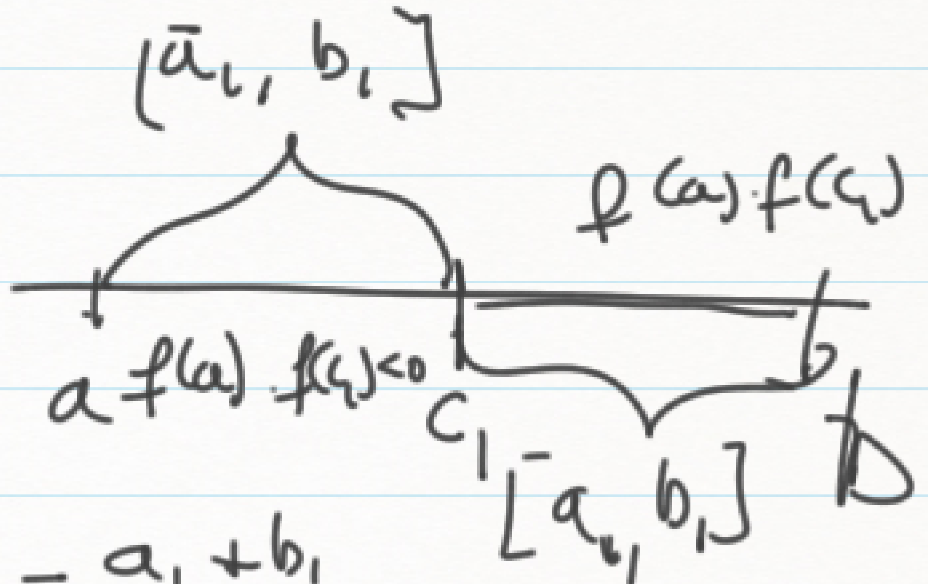
$\boxed{f(a)f(c_1) > 0}$ $\to$ $a_1 = c_1$, $b_1 = b$

$f(a)$ e $f(c_1)$ hanno lo stesso segno e quindi $f(c_1)$ e $f(b)$ non hanno lo stesso segno

$f(c_1)f(b) < 0$

$\boxed{f(a_1)f(b_1) < 0}$

$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$



$c_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \to$ se $f(c_2) = 0$ finito

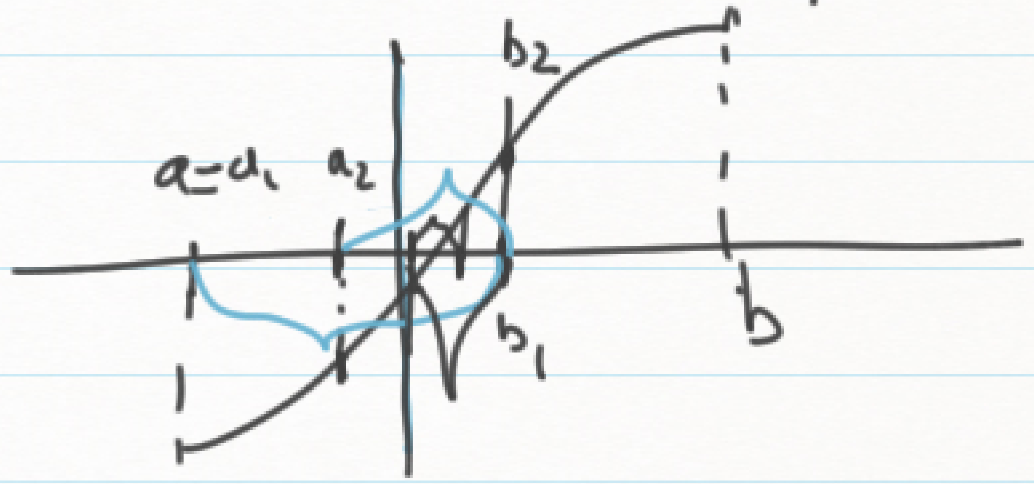
Text

Secondo intervallo

$\boxed{f(a_1)f(c_2) < 0}$ $\to$ $[a_2, b_2]$ $\to$ $\boxed{a_2 = a_1, \quad b_2 = c_2}$

o

$\boxed{f(a_1)f(c_2) > 0}$ $\to$ $\boxed{a_2 = c_2, \quad b_2 = b_1}$



Etc per gli altri intervalli

Possono succedere due cose,o si è torovato uno zero e allora è fatta oppure si prosegue all'infinito in quel caso

abbiamo costruito due successioni

$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ t.c. $a_n < b_n$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \longrightarrow 0$

$f(a_n)f(b_n) < 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n \leq a_{n+1} \\ b_n \geq b_{n+1} \end{array}}$$

$a_n = a_{n+1}$

$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \frac{2a_n}{2} = a_n$

$a \leq a_n \leq b$

$a \leq b_n \leq b$

a_n è una successione monotona crescente e limitata $\longrightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = x_1$

b_n è ———————— decrescente e limitata $\longrightarrow \lim_{n \to +\infty} b_n = x_2$

$\lim_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0 \Longrightarrow x_2 - x_1 = 0 \Longleftrightarrow x_2 = x_1$

ma usando la continuità:

Claim: $f(x_1) = 0$

$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) = f(x_1)^2 \geq 0$

$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$

Per il teorema della permanenza del segno

$\Longrightarrow f(x_1)^2 = 0$

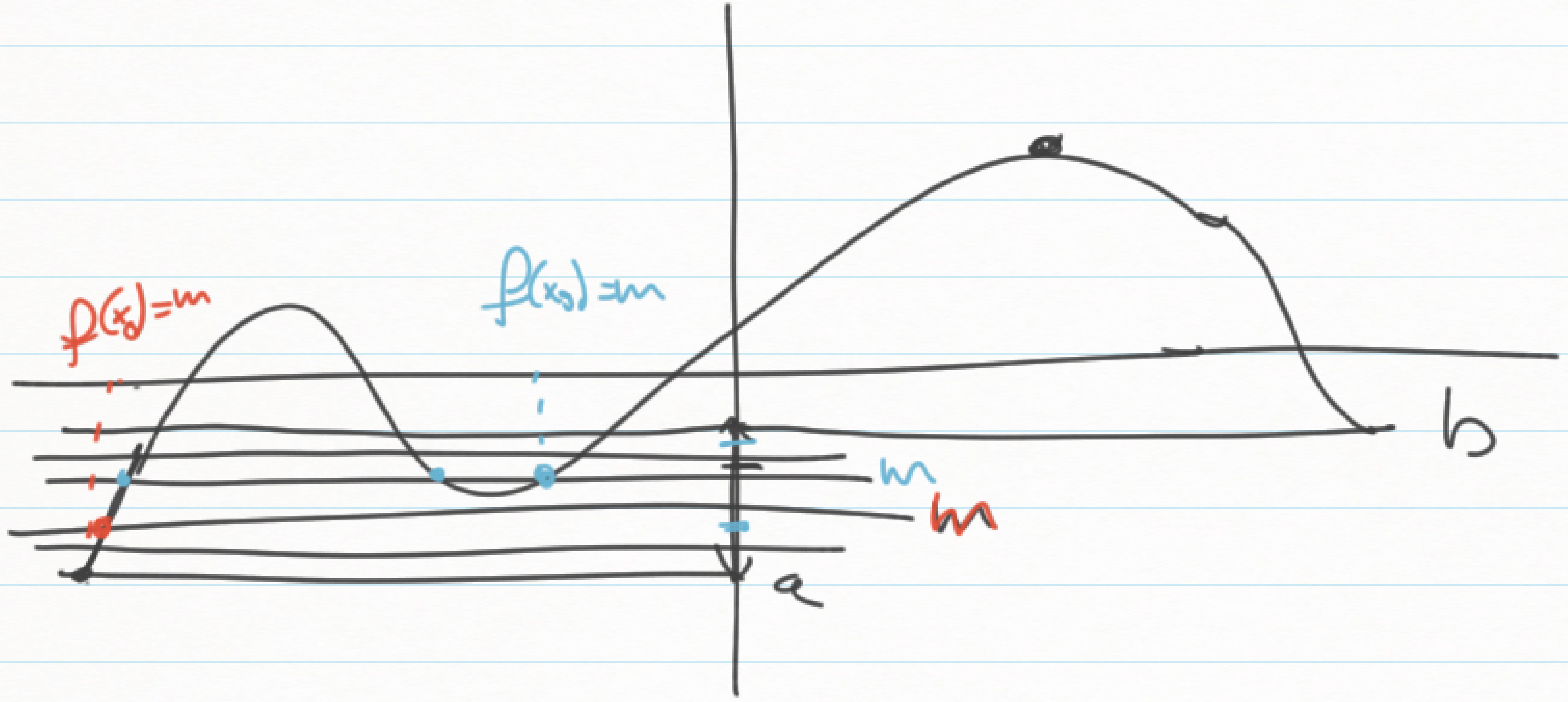
$\Longleftrightarrow \boxed{f(x_1) = 0}$

C.V:D.

<u>Corollario</u> Sia f una funzione continua in $[a, b]$ t.c. $f(a) \neq f(b)$

$\forall m \in [f(a), f(b)]$ (se $f(a) < f(b)$) $\quad$ ($\forall m \in [f(b), f(a)]$ se $f(b) < f(a)$)

$\exists\, x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) = m$



Per qualsiasi retta $y = m \in (f(a), f(b))$ ha un <u>intersezione non vuota con il grafico della funzione</u>

<u>Teorema di Weierstrass</u>: Se f è una funzione continua in $[a, b]$ allora esiste il <u>massimo</u> e il <u>minimo</u> di f in $[a, b]$

<u>Corollario</u>: $\forall y \in [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f(x)] \Longrightarrow \exists\, x \in [a, b]$ t.c. $f(x) = y$