$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad f(x) \approx g(x) \quad x \to x_0$$

<u>Definizione</u> f è un "o piccolo" di g per x che tende a x_0

$$f(x) = o(g(x)) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

f <u>derivabile</u> in x_0
e la derivata è continua

Equazione della retta tangente
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0$$

De L'Hopital
$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \underline{\underline{f'(x_0)}} = 0$$

Domanda Data una funzione f n-derivabile in x_0

(n-derivabile in un intorno, derivate siano continue)

Qual'è il polinomio che approssima meglio f vicino a x_0.

$f(x) = \cos x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$$

$$\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$$

$$\cos x - \left[1 - \frac{1}{2}x^2\right] = o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} = 0$$

Trovare un polinomio tale che $\left.\begin{array}{l} f(x_0)=P(x_0) \\ f^k(x_0)=P^k(x_0) \end{array}\right\}$ ⊛

$1 \leq k \leq n$

Il candidato è il polinomio di Taylor

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f^3(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad e^x=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

è l'unico polinomio di grado n che verifica ⊛

<u>Teorema</u> Se f è derivabile n volte in x_0 $\Rightarrow$ $f(x)=P_n(x)+o\left[(x-x_0)^n\right]$

$$\boxed{e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}} \qquad \boxed{(e^x)'=e^x} \quad e^0=1 \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\right)'=\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\right)'=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\,x^{k-1}}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

Teor: $f(x) = P_n(x) + o\left[(x-x_0)^n\right]$

$n = 1 \rightarrow$ già verificata

$n = 2$ $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2\right]}{(x-x_0)^2}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{2} = 0$$

Dimostrazione per induzione: Ip: per k è vero $\displaystyle \frac{f(x) - P_k(x)}{(x-x_0)^k} \rightarrow 0$

Dim che sia vero $k+1$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{k+1}(x)}{(x-x_0)^{k+1}}$$

Fare esercizio.

$e^x \longrightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

$\sin x \quad P_{2n+1}(x) = \cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$\cos x \quad P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}, \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$

$\log(1+x) \quad P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \frac{4!}{5!}x^5$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$