Matematica I, 05/09/02
I. Birindelli

> Pb 1)Sia $a \in \mathbb{R}$. Sia Π il piano di equazione $ax + 2y + z = 1$.
> a) Determinare $\vec{v}$ un vettore unitario ortogonale a Π.
> b) Sia $\vec{i} = (1, 0, 0)$. Determinare a affinchè $\vec{v} \cdot \vec{i} = \frac{1}{2}$

Risposta: a) Il vettore $\vec{u} = (a, 2, 1)$ dei coefficienti dell'equazione del piano e' ortogonale al piano ma non e' unitario, quindi il vettore cercato è
$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ che è parallelo a $\vec{u}$ ma unitario.
Siccome $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + 5}$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{a^2+5}}(a, 2, 1)$.

b) $\vec{v} \cdot \vec{i} = \frac{a}{\sqrt{a^2+5}}$ per definizione di prodotto scalare.
Quindi per trovare a devo imporre:
$\frac{a}{\sqrt{a^2+5}} = \frac{1}{2}$ i.e. $4a^2 = a^2 + 5$, $a = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$.

> Pb.2) Risolvere il seguente sistema di equazioni
> $$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Risposta: La matrice dei coefficienti ha rango 2 (infatti la matrice $\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$)
quindi anche la matrice completa ha rango 2. Pertanto il sistema ha infinite soluzioni ottenute risolvendo il sistema
$\begin{cases} -y + z = 1 - x \\ 2y - 3z = 4 + 2x \end{cases}$. In questo modo y e z vengono date in funzione di x.

Pb.3)Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$. In particolare determinare: insieme di definizione (1), intervalli di monotonia (2), eventuali massimi e minimi locali (1), convessità (1) e asintoti (2), **disegnare il grafico di f. (2)**

Risposta parziale: Insieme di definizione f: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$
perchè dobbiamo richiedere che $x + 2 \neq 0$.
Per determinare gli intervalli di monotonia, studiamo il segno della derivata
$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+2)-(x^2+2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+3x+2}{(x+2)^2}$. Ovviamente
$x^2 + 3x + 2 \geq 0$ per $x \in (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$ e negativa altrove.
Inoltre $(x + 2)^2 \geq 0$. Quindi f è monotona crescente in $(-\infty, -3]$ e in $[-1, +\infty)$
e monotona decrescente in $(-3, -2)$ e in $(-2, -1)$.
Pertanto il punto di coordinate $(-3, -5)$ è un massimo locale
mentre il punto di coordinate$(-1, -1)$ è un minimo locale.
Gli asintoti si ottengono calcolando i limiti negli estremi del dominio
e si ottiene che $x = 2$ è un asintoto verticale
mentre $y = x - 1$ è un asintoto obbliquo in $+\infty$ e in $-\infty$
(infatti è facile vedere che $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$.)

Pb.4) a)Disegnare la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = -x^2 + x + 2$
b)Determinare l'area compresa tra la parabola $\mathcal{P}$ e l'asse delle x nel semi-piano $y > 0$.

Risposta di b): Si tratta di individuare l'intersezione della parabola con l'asse delle x i.e. trovare x tale che $-x^2 + x + 2 = 0$ si trova $x = -1$ e $x = 2$. Ora calcoliamo
$\int_{-1}^{2} -x^2 + x + 2dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$