Matematica I,

27/1/2003 *prof. I. Birindelli*

Pb.1) Trovare l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P_o = (-1, 0, 1)$ e ortogonale alla retta di equazione $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$

Risposta: Per determinare $\vec{w}$ il vettore direttore della retta data dall'intersezione di due piani è sufficiente calcolare il prodotto vettoriale dei vettori ortogonali ai piani, cioè:

$$\vec{w} = (2, 1, -1) \wedge (0, -1, 1) = (0, -2, -2)$$

Il piano ortogonale al vettore $\vec{w}$ e passante per il punto $P_o(-1, 0, 1)$ contiene tutti i punti $P = (x, y, z)$ tali che $\vec{P_oP} \cdot \vec{w} = 0$ e quindi si ottiene:

$0(x + 1) - 2(y) - 2(z - 1) = 0$ cioè $y + z = 1$.

Pb.2) Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x + y - \sqrt{2}z = 1 \\ \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + z = 2 \end{cases}$

Risposta: La matrice dei coeficienti ha rango 2 perché $\det\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$ e quindi anche la matrice compelta ha rango 2. Per tanto per il Teorem di Rouche' Capelli esistono soluzioni e precisamente otteniamo infinite soluzioni risolvendo rispetto a x il sistema in y e z: $\begin{cases} y - \sqrt{2}z = 1 - 2x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y + z = 2 - \sqrt{2}x \end{cases}$ si ottiene: che l'insieme delle soluzioni è dato da $(x, \frac{1+2\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}-1-2x}{\sqrt{2}})$.

Pb.3) Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando intorno all'asse delle x la porzione di piano $D = \{(x,y): \ 2x - y > 0, y - x^2 > 0\}$.

Risposta: Le due curve $y = 2x$ e $y = x^2$ si intersecano in $x = 0$ e $x = 2$ e inoltre tra 0 e 2 la parabola è sotto alla retta pertanto il volume è dato dall' integrale delle aree delle corone circolari che per ogni $x \in (0,2)$ hanno raggio maggiore $R = 2x$ e e raggio minore $r = x^2$ e le cui aree sono date da: $\pi(2x)^2 - \pi(x^2)^2$.

Il volume è dato da: $\pi(\int_0^2 4x^2 - x^4 dx) = \pi(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5})|_0^2 = \pi(\frac{32}{3} - \frac{64}{5})$

Pb. 4) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} x+2 & x > a \\ \frac{6}{x+1} & x \leq a \end{cases}$ è continua.

Risposta: La funzione f è continua in a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Ora il limite esiste solo se coincidono il limite destro e il limite sinistro e quindi richiediamo:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = a + 2 = \lim_{x \to a^-} f(x) = \frac{6}{a+1} = f(a)$$

quindi f è continua se $a + 2 = \frac{6}{a+1}$ i.e. $(a+1)(a+2) = 6 \leftrightarrow a^2 + 3a - 4 = 0$ che è verificato per $a = 1$ e a=-4

Pb 5) Studiare il grafico della funzione
$f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$ in particolare determinare : insieme di definizione, asintoti, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), **disegnare il grafico**.

Il dominio di f è dato da $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Si osservi che $\frac{x^2-3x}{x+1} = x - 4 + \frac{4}{x+1}$. Pertanto la funzione ha un asintoto verticale in $x = -1$ e come asintoto obliquo in $+\infty$ e $-\infty$ si ottiene la retta $y = x - 4$.

Ora calcoliamo $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ Chiaramente, nel dominio di $f$il segno di f' coincide con il segno di x^2+2x-3 e quindi è positiva il $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ ed è negativa in $(-3, 1) \setminus \{-1\}$.