Matematica I, 16/09/02
I. Birindelli

Pb 1) Sia $a \in \mathbb{R}$, sia $\vec{v} = (1, -2, a)$.
a) Determinare un vettore $\vec{w}$ parallelo a $\vec{v}$ e di lunghezza 1.
b) Determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{v}$ sia ortogonale al vettore $\vec{u} = (3, 2, 1)$.

Risposta

a) $\vec{w}$ è parallelo a $\vec{v}$ se $\vec{w} = \lambda\vec{v}$ per qualche valore λ. Quindi cerchiamo λ tale che $|\lambda\vec{v}| = 1$ i.e. $|\lambda| = \frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1+2^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5+a^2}}$. In particolare si puo' prendere $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5+a^2}}$ e dunque $\vec{w} = (\frac{1}{\sqrt{5+a^2}}, \frac{-2}{\sqrt{5+a^2}} \frac{a}{\sqrt{5+a^2}})$.

Attenzione in questa domanda non era richiesto uno specifico valore di a !!!

b) Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo. Dunque bisogna imporre: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ cioè $3.1 + 2.(-2) + a.1 = 0$ cioè $3 - 4 + a = 0$: $a = 1$ il vettore $\vec{v} = (1, -2, 1)$ è ortogonale a $\vec{u}$.

Pb.2) Al variare di $a \in \mathbb{R}$ determinare il rango della matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & a & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo considerare le matrici 3×3 contenute in A. Cominciamo con il considerare
$A2 = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ Calcoliamone il determinante: $\det A2 = -a + 5$.

Se $a \neq 5$ allora det$A2 \neq 0$ e quindi il rango di $A = 3$.

Se $a = 5$ dobbiamo vedere se ci sono degli altri minori di rango 3 con determinante diverso da 0. Per esempio consideriamo
$A3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ sostituendo $a = 5$. Det$A3 = 6 - 6 = 0$ e dobbiamo anche verificare
$A1 = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ a & 5 & 0 \end{pmatrix}$ sostituendo $a = 5$. Det$A1 = 0$ e dobbiamo anche verificare
$A4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ sostituendo $a = 5$. Det$A4 = 0$ e quindi tutte le metrici di ordine 3 hanno determinante nullo mentre $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$ quindi:

Per $a = 5$ rango di A=2.

Pb.3)Studiare il grafico della funzione $f(x) = \log(x^2 + x - 2)$.
In particolare determinare: insieme di definizione (1), asintoti (2), intervalli di monotonia (2) eventuali massimi e minimi locali (1), **disegnare il grafico di f. (3)**

Risposta parziale: 1)Insieme di definizione: L'argomento del logaritmo deve essere positivo quindi $x^2 + x - 2 > 0$ e questo si ottiene per $x > 1$ e $x < -2$. Pertanto: $\mathrm{def} f = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

2)Asintoti: Calcoliamo i limiti negli estremi del dominio:

$\lim_{x \to -2} \log(x^2 + x - 2) = -\infty$, infatti $\lim_{x \to -2} (x^2 + x - 2) = 0$ mentre $\lim_{t \to 0} \log t = -\infty$ analogamente $\lim_{x \to 1} \log(x^2 + x - 2) = -\infty$. Quindi $x = -2$ e $x = 1$ sono due asintoti verticali.

$\lim_{x \to +\infty} \log(x^2 + x - 2) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} \log(x^2 + x - 2) = +\infty$ perchè il logaritmo tende a $+\infty$ quando l'argomento tende a $+\infty$

3) Intervalli di monotonia : $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$ siccome nel dominio di definizione $x^2 + x - 2 > 0$ per studiare il segno della derivata dobbiamo tener conto del solo segno di $2x + 1$ che è negativo per $x < -2$ e positivo per $x > 1$. La funzione è crescente in $(1, +\infty)$ e decrescente in $(-\infty, -2)$.

4) Nel intervallo $(-\infty, -2)$ la funzione decresce da $+\infty$ fino a $-\infty$ e viceversa nel intervallo $(1, +\infty)$. Pertanto non presenta massimi e minimi locali.

Pb.4) Determinare l'insieme delle primitive della funzione $f(x) = xe^{2x}$.

Risposta: Per integrare xe^{2x} usiamo l'integrazione per parti: consideriamo
$g(x) = x$ e $h'(x) = e^{2x}$ quindi
$g'(x) = 1$ mentre $h(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.
Si ottiene:
$$\int xe^{2x}dx = x.\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$
dove C è una qualsiasi costante.