Istituzioni di Matematiche II, a.a. 2002/03 Prof. I. Birindelli.
Note di geometria nello spazio Euclideo (Bozza).

1 I vettori.

Denotiamo P_oP_1 il segmento orientato avente come estremi i punti P_o e P_1. Due segmenti P_oP_1 e P_2P_3 sone **equipollenti** se hanno

i)stessa lunghezza

ii)stessa direzione (i.e. i due segmenti sono paralleli)

iii)stesso verso

Quindi i due segmenti sono equipollenti se spostando parallelamente il segmento P_2P_3 in modo tale che P_2 coincide con P_o allora P_3 coincide on P_1.

Definizione 1.1 *Il vettore $\vec{v} = P_o\vec{P}_1$ è dato dall'insieme dei segmenti equipollenti al segmento P_oP_1.*

Quindi un vettore è completamente determinato da:

i) la sua lunghezza

ii) la sua direzione

iii) il suo verso.

Viceversa un vettore si può pensare applicato in qualsiasi punto dello spazio: $P_o\vec{P}_1 = P_2\vec{P}_3$ se si segmenti P_oP_1 e P_2P_3 sono equipollenti.
Il simbolo $|\vec{u}|$ indica la lunghezza del vettore $\vec{u}$ anche detta norma di $\vec{u}$.

Somma. Dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possiamo definire la somma con la regola del parallelogramma. Sia $\vec{u} = O\vec{P}_1$ e $\vec{v} = O\vec{P}_2$ possiamo determinare un unico punto P_3 tale che $P_1OP_2P_3$ formi un parallelogramma, più precisamente scegliamo P_3 tale che $O\vec{P}_2 = P_1\vec{P}_3$. Per definizione il vettore somma è dato da:

$$\vec{u} + \vec{v} := O\vec{P}_3.$$

In particolare, se i segmenti OP_1 e OP_2 sono paralleli cioè se i tre punti O, P_1 e P_2 sono allineati si considera il parallelogramma degenere. In particolare si sceglie P_3 anch'esso allineato e se i vettori $O\vec{P}_1$ e $O\vec{P}_2$ hanno lo stesso verso il vettore $O\vec{P}_3$ ha anch'esso lo stesso verso e ha lunghezza la somma delle lunghezze. Viceversa se i vettori $O\vec{P}_1$ e $O\vec{P}_2$ hanno verso opposto, il vettore $\vec{OP_3}$ ha il verso del vettore più lungo e lunghezza la differenza delle lunghezze.

Prodotto per uno scalare. Consideriamo lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ e il vettore $\vec{u}$. Il prodotto $\lambda\vec{u}$ è dato da un vettore parallelo a $\vec{u}$ di lunghezza $|\lambda\vec{u}| = |\lambda||\vec{u}|$, di verso concorde a $\vec{u}$ se $\lambda > 0$ e di verso opposto se $\lambda < 0$. Viceversa due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono **paralleli** (useremo anche il termine **linearmente dipendenti** oppure **colineari**) se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Il vettore $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ è un vettore unitario (anche detto **versore**) che ha la stessa direzione e stesso verso di $\vec{u}$ ma ha norma uguale a 1.

Equazione vettoriale di una retta. Un retta dello spazio è completamente determinata da un punto e un vettore non nullo. La retta r passante per il punto P_o e nella direzione del vettore $\vec{u}$ è dato dall'insieme dei punti P tali che i vettori $\vec{P_oP}$ e $\vec{u}$ siano linearmente dipendenti. In particolare

$$P \in r \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tale che } \vec{P_oP} = t\vec{u}.$$

L'**equazione vettoriale** della retta r è data da

$$\vec{P_oP} = t\vec{u} \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Equazione vettoriale di un piano. In modo analogo al piano euclideo $\mathbb{R}^2$ determinato da un punto O detto l'origine e da due vettori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ possiamo determinare un piano π dello spazio, individuando un punto P_o e due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ purchè non siano linearmente dipendenti. Il piano π passante per il punto P_o e avente come **giacitura** i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è dato dall'insieme dei punti P tali che esistano $s \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ tali che

$$\vec{P_oP} = s\vec{u} + t\vec{v}.$$

L'**equazione vettoriale** del piano π è data da

$$\vec{P_oP} = s\vec{u} + t\vec{v} \, \forall s \in \mathbb{R} e \forall t \in \mathbb{R}.$$

Base euclidea. Supponiamo di avere fissato un punto O che chiamiamo origine, fissiamo inoltre un vettore unitario $\vec{\imath}$, determiniamo dunque un vettore unitario $\vec{\jmath}$ ortogonale a $\vec{\imath}$ e un terzo vettore unitario $\vec{k}$ ortogonale a $\vec{\imath}$ e a $\vec{\jmath}$. Inoltre scegliamo il vettore $\vec{k}$ in modo tale che valga la regola della mano destra: se poniamo il pollice e l'indice della mano destra nel verso e nella direzione dei vettori $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$, il verso del vettore $\vec{k}$ è dato dal verso del dito medio.

Consideriamo il piano π_{ij} passante per l'origine e avente $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ come giacitura. Sia P un punto generico dello spazio. Consideriamo la retta r_k passante per P nella direzione del vettore $\vec{k}$. Chiamiamo P_1 il punto di intersezione della retta r_k e del piano π_{ij}. Chiaramente

$$\vec{OP} = \vec{OP_1} + \vec{P_1P} \tag{1.1}$$

inoltre per definizione di retta

$$\exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } \vec{P_1P} = z\vec{k},$$

mentre per definizone del piano π_{ij}

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ e } \exists y \in \mathbb{R} \text{ tali che } \vec{OP_1} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

Sostituendo queste due uguaglianze in (1.1) otteniamo

$$\vec{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Viceversa se consideriamo la terna (x, y, z) di elementi di $\mathbb{R}$ allora il vettore $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ determina un punto P tale che

$$\vec{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

In questo modo fissata la base $O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ possiamo identificare i punti dello spazio con le terne (x, y, z). (x, y, z) sono le **coordinate** del punto P. Lo spazio delle terne (x, y, z) si chiama $\mathbb{R}^3$.

Siccome possiamo pensare i vettori applicati nell'origine ad ogni vettore $\vec{u}$ corrisponde un punto P_o tale che $\vec{u} = \vec{OP_o}$ e dunque se (x_o, y_o, z_o) sono le coordinate del punto P_o abbiamo in particolare

$$\vec{u} = x_o\vec{\imath} + y_o\vec{\jmath} + z_o\vec{k}.$$

In questo modo possiamo identificare anche i vettori con le terne di $\mathbb{R}^3$.

Ora siamo nella posizione di riprendere le definizioni geometriche delle operazioni sui vettori e darne le formule corripondenti per le coordinate dei vettori.

Sia $\vec{u}$ il vettore di coordinate (u_x, u_y, u_z) e $\vec{v}$ il vettore di coordinate (v_x, v_y, v_z):

- $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$
- il vettore $\vec{u} + \vec{v}$ ha come coordinate $(u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$
- il vettore $\lambda\vec{u}$ ha coordinate $(\lambda u_x, \lambda u_y, \lambda u_z)$.

Esercizio: Giustificare queste formule.

Prodotto scalare.

Sia $\vec{u}$ il vettore di coordinate (u_x, u_y, u_z) e $\vec{v}$ il vettore di coordinate (v_x, v_y, v_z), definiamo **prodotto scalare** di $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e useremo la notazione $\vec{u} \cdot \vec{v}$, nel seguente modo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Si osservi che il prodotto scalare di due vettori è uno scalare (cioè un numero reale).

Si osservi inoltre che:

$$\vec{u}^2 := \vec{u} \cdot \vec{u} = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = |\vec{u}|^2.$$

In generale vale la seguente uguaglianza

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\gamma$$

dove γ è l' "angolo" trai due vettori. Da questa uguaglianza è facile dimostrare le seguenti proposizioni (farlo per esercizio).

Proposizione 1.2 *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due vettori non nulli siano ortogonali è che sia nullo il loro prodotto scalare.*

Proposizione 1.3 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) *Per ogni coppia di vettori dello spazio $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vale la seguente disuguaglianza: $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$. L'uguaglianza è verificata solo se i due vettori sono linearmente dipendenti.*

Prodotto vettoriale.

Sia $\vec{u}$ il vettore di coordinate (u_x, u_y, u_z) e $\vec{v}$ il vettore di coordinate (v_x, v_y, v_z), definiamo **prodotto vettoriale** di $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e usiamo la notazione $\vec{u} \wedge \vec{v}$, tramite la seguente formula

$$\vec{u} \wedge \vec{v} := (u_y v_z - u_z v_y, -u_x v_z + u_z v_x, u_x v_y - u_y v_x). \tag{1.2}$$

Si osservi che il prodotto vettoriale tra due vettori è un vettore che soddisfa le seguenti proprietà

Proposizione 1.4 *Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori non nulli:*

1. *condizione necessaria e sufficiente affincheé $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ è che $\vec{u}$ e $\vec{v}$ siano linearmente dipendenti.*

2. *se $\vec{u} \wedge \vec{v}$ non è nullo allora $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è un vettore ortogonale sia al vettore $\vec{u}$ che al vettore $\vec{v}$.*

3. *se $\vec{u} \wedge \vec{v}$ non è nullo, $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$ è uguale all'area del parallelogramma costruito sui vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ cioè $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$, dove θ è l'angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

4. *$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$*

Dimostrazione

1 Supponiamo che $\vec{u}$ e $\vec{v}$ siano linearmente dipendenti, cioè che esista $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, quindi $u_x = \lambda v_x$, $u_y = \lambda v_y$ e $u_z = \lambda v_z$. sostituendo queste tre uguaglianze in (1.2) si vede che allora

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (\lambda(v_z v_y - v_y v_z), \lambda(-v_x v_z + v_z v_x), \lambda(v_x v_z - v_z v_x)) = \vec{0}.$$

Viceversa se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, allora in particolare

$$\begin{aligned} u_y v_z &= u_z v_y \\ u_x v_z &= u_z v_x \\ u_x v_y &= u_y v_x \end{aligned}$$

Siamo nell'ipotesi che i due vettori siano non nulli quindi supponiamo per esempio che $u_y \neq 0$ allora dividiamo la prima e la terza uguaglianza per u_y:

$$v_z = \frac{v_y}{u_y} u_z$$

$$v_x = \frac{v_y}{u_y} u_x$$

infine chiaramente vale

$$v_y = \frac{v_y}{u_y} u_y$$

quindi se scegliamo $\lambda = \frac{v_y}{u_y}$ abbiamo dimostrato che $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, cioè $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente dipendenti.

2. Per dimostrare che $\vec{u}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sono ortogonali basta verificare che $\vec{u} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$. Ora basterà sviluppare questa formula usando la definizione di prodotto scalare e prodotto vettoriale. (**Farlo per esercizio**).

Non diamo la dimostrazione di **3.**

4. è immediata.

Equazioni parametriche della retta.

L'equazione vettoriale della retta r passante per il punto P_o e avente come vettore direttore $\vec{u}$ è data da $\vec{P_oP} = t\vec{u}$ e può essere espressa in termini di coordinate. Se $\vec{u}$ è il vettore di coordinate (u_x, u_y, u_z) e P_o il punto di coordinate (x_o, y_o, z_o), il generico punto $P = (x, y, z)$ della retta r deve soddisfare

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x - x_o = u_x t \\ y - y_o = u_y t \\ z - z_o = u_z t. \end{cases}$$

Queste equazioni sono dette equazion parametriche della retta. Ad ogni punto di r corrisponde uno specifico valore t, ad ogni valore di t corrisponde uno specifico punto di r.

Se cerchiamo le equazioni parametriche di una retta passante per due punti $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ allora il vettore direttore è dato dal vettore $\vec{P_oP_1}$ di coordinate $(x_o - x_1, y_o - y_1, z_o - z_1)$. Le equazioni parametriche diventano

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x - x_o = (x_o - x_1)t \\ y - y_o = (y_o - y_1)t \\ z - z_o = (z_o - z_1)t. \end{cases}$$

Equazioni parametriche dei piani.

Possiamo, in modo analogo, dall'equazione vettoriale del piano π avente per giacitura i vettori $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e passante per il punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ data da $\vec{P_oP} = s\vec{u} + t\vec{v}$ possiamo ottenere le equazioni per le coordinate:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall s \in \mathbb{R} \begin{cases} x - x_o = u_x s + v_x t \\ y - y_o = u_y s + v_y t \\ z - z_o = u_z s + v_z t. \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche del piano π. Ad ogni punto di π corrisponde una specifica coppia di valori t e s, ad ogni coppia di t e s corrisponde uno specifico punto di π.

Siano P_o, P_1 e P_2 tre punti **non allineati** dello spazio (cioè tali che non giacciono sulla stessa retta e dunque tali che i vettori $\vec{P_oP_1}$ e $\vec{P_oP_2}$ siano linearmente indipendenti). I tre punti individuano una giacitura: $\vec{P_oP_1}$ e $\vec{P_oP_2}$, quindi per trovare le equazioni parametriche del piano π passante per tre punti P_o, P_1 e P_2 basterà sostituire i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ con i vettori $\vec{P_oP_1}$ e $\vec{P_oP_2}$.

Vettori linearmente dipendenti Prima di parlare di dipendenza lineare diamo la seguente

Definizione 1.5 *Dati n vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$, una* **combinazione lineare** *di questi vettori è data da $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n$ con $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ etc.…*

Abbiamo già visto che due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente dipendenti se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Tre vettori $\vec{w}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono **linearmente dipendenti** se uno di questi vettori può essere scritto come combinazione lineare degli altri due e.g.: $\vec{w} = s\vec{u} + t\vec{v}$ per quelche $s \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$.

In particolare si osservi che questo significa che tre vettori sono linearmente dipendenti se sono **complanari**, cioè se i tre vettori sono contenuti in uno stesso piano.

Tre vettori che non siano linearmente dipendenti sono detti **linearmente indipendenti**.

Equazioni cartesiane dei piani nello spazio. Consideriamo il piano π di equazioni parametriche:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall s \in \mathbb{R} \begin{cases} x - x_o = u_x s + v_x t \\ y - y_o = u_y s + v_y t \\ z - z_o = u_z s + v_z t. \end{cases}$$

Siccome i vettori $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ sono linearmente indipendenti, $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \neq 0$ e inoltre, per le proprietà del prodotto vettoriale, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è un vettore ortogonale a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ e dunque a tutte le combinazioni lineari di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (perchè?). In particolare, $\vec{w}$ è ortogonale al piano π i.e. a tutti i vettori $\vec{P_oP} = (x - x_o, y - y_o, z - z_o)$. Quindi otteniamo:

$$\vec{P_oP} \cdot \vec{w} = 0$$

che diventa, usando (1.2)

$$ax + by + cz = d \tag{1.3}$$

con

$$a = u_y v_z - v_y u_z,\ b = v_x u_z - v_z u_x,\ c = u_x v_y - u_y v_x,$$
$$d := x_o(u_y v_z - u_z v_y) + y_o(u_z v_x - u_x v_z) + z_o(u_x v_y - u_y v_x).$$

L'equazione (1.3) è **l'equazione cartesiana** del piano π.

Ricapitolando:

Se $P = (x, y, z)$ è il generico punto del piano π allora il vettore
$\vec{P_oP} = ((x - x_o), (y - y_o), (z - z_o))$ è il generico vettore del piano π.
L'equazione (1.3) diventa vettorialmente:

$$\vec{P_oP} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \tag{1.4}$$

cioè il generico vettore del piano è ortogonale al vettore $\vec{u} \wedge \vec{v}$. In altre parole il piano π è costituito di tutti i punti P tali che il vettore $\vec{P_oP}$ è ortogonale al vettore $\vec{u} \wedge \vec{v}$. (1.4) è un'altra equazione vettoriale che caratterizza i punti del piano π.

Abbiamo visto quindi che un piano può essere caratterizzato da un equazione del tipo $ax + by + cz = d$. Ora vogliamo vedere il viceversa cioè :
Dati a,b e c $\in \mathbb{R}$ non contemporaneamente nulli, e d $\in \mathbb{R}$, l'insieme dei punti P di coordinate (x, y, z) che verificano l'equazione

$$ax + by + cz = d \tag{1.5}$$

è un piano.

Senza perdita di generalità possiamo supporre che $a \neq 0$. Dunque l'equazione (1.5) può essere riscritta

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z + \frac{d}{a}$$

oppure equivalentemente

$$\begin{cases} x - \frac{d}{a} = -\frac{b}{a}s - \frac{c}{a}t \\ y = s \\ z = t. \end{cases} \tag{1.6}$$

Se consideriamo il vettore $\vec{u} = (-\frac{b}{a}, 1, 0)$, il vettore $\vec{v} = (-\frac{c}{a}, 0, 1)$ e il punto $P_o = (\frac{d}{a}, 0, 0)$ allora l'equazione (1.6) scritta in forma vettoriale diventa:

$$\vec{P_oP} = s\vec{u} + t\vec{v}.$$

Dunque effetivamente l'equazione (1.5) determina il piano passante per il punto P_o e avente per giacitura $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Si osservi inoltre che se fissiamo P_o un punto di coordinate (x_o, y_o, z_o) che verifica (1.5) cioè $ax_o + by_o + cz_o = d$ e se sostituiamo questa espressione di d nel equazione (1.5) otteniamo:

$$ax + by + cz = ax_o + by_o + cz_o.$$

Questo equivale a scrivere

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0.$$

Quindi se $\vec{w} = (a, b, c)$, l'insieme dei punti che risolve (1.5) verifica $\vec{P_oP} \cdot \vec{w} = 0$ dunque (a, b, c) è un vettore **ortogonale** al piano.

Equazione cartesiana delle rette. Sia r la retta passante per il punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ avente come vettore direttore $\vec{u}$ di coordinate (u_x, u_y, u_z). Abbiamo visto che le equazioni parametriche della retta sono date da:

$$\begin{cases} x - x_o = u_x t \\ y - y_o = u_y t \\ z - z_o = u_z t. \end{cases}$$

Siccome $\vec{u}$ è non nullo, almeno una delle tre coordinate è non nulla, supponiamo che si abbia $u_x \neq 0$. Allora la prima equazione diventa: $t = \frac{x - x_o}{u_x}$. Sostituendo questo valore nelle altre due equazioni otteniamo:

$$\begin{cases} y - y_o = \frac{x - x_o}{u_x} u_y \\ z - z_o = \frac{x - x_o}{u_x} u_z \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} ax + by = d \\ a'x + b'y = d' \end{cases}$$

con $a = u_y$, $b = -u_x$, $d = x_o u_y - y_o u_x$ e $a' = u_z$, $b' = -u_x$, $d' = x_o u_z - z_o u_x$.

Queste sono delle equazioni cartesiane della retta r. Si osservi in particolare che ognuna delle due equazioni determina un piano. Quindi la retta r non è altro che l'intersezione di questi due piani.

In generale dati due piani π e π' di equazioni cartesiane rispettivamente

$$ax + by + cz = d$$

e

$$a'x + b'y + c'z = d',$$

tali che i due vettori (a, b, c) e (a', b', c') siano linearmente indipendenti, il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d', \end{cases}$$

determina l'**equazione cartesiana** di una retta r.

Per caratterizzare geometricamente la retta è sufficiente osservare che il vettore (a, b, c) è ortogonale al piano π e dunque alla retta r e che il vettore (a', b', c') è ortogonale al piano π' e dunque alla retta r. Se ne deduce che *il vettore direttore della retta r è un vettore ortogonale sia al vettore* (a, b, c)

che al vettore (a', b', c'). Per ottenere tale vettore basta considerare $(a, b, c) \wedge (a', b', c')$. Per ottenere un punto della retta basta invece fissare una delle tre coordinate e risolvere il sistema delle equazioni cartesiane per le due coordinate rimanenti.

Proiezioni ortogonali. Sia il vettore $\vec{u}$ di coordinate (u_x, u_y, u_z) e $\vec{v}$ il versore (i.e. il vettore **unitario**) di coordinate (v_x, v_y, v_z) $(|\vec{v}| = 1)$.

Siccome $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\gamma = |\vec{u}| \cos\gamma$ dove γ è l'angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$ allora $|\vec{u} \cdot \vec{v}|$ è la lunghezza della componente di $\vec{u}$ nella direzione $\vec{v}$.

La **proiezione ortogonale** del vettore $\vec{u}$ sul versore $\vec{v}$ è data dal vettore $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}$.

Sia r la retta di vettore direttore $\vec{w}$. Sia $\vec{u}$ un vettore non parallelo a $\vec{w}$. Sia $\vec{v}$ il **versore direttore** $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$.

La **proiezione ortogonale** di $\vec{u}$ su r è data dal vettore $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}$.

Sia ora il piano π di equazione cartesiana $ax + by + cz = d$. Sia $\vec{u}$ un vettore di coordinate (u_x, u_y, u_z). Si ricorda che il vettore $\vec{w} = (a, b, c)$ è un vettore ortogonale al piano π. Sia $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$ un versore ortogonale al piano π.

La **proiezione ortogonale** del vettore $\vec{u}$ sul piano π è data dal vettore $\vec{w} := \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}$.

Si osservi che questa formula può esser riscritta $\vec{u} = \vec{w} + (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}$. In questo modo abbiamo scomposto il vettore $\vec{u}$ nella somma di due vettori ortogonali, uno contenuto nel piano π e l'altro ortogonale al piano π.

Si osservi che

1) se $\vec{u}$ è ortogonale al piano π allora è $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} = \vec{u}$ e dunque $\vec{w} = 0$

2) se $\vec{u}$ è contenuto nel piano π allora $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} = 0$ e dunque $\vec{w} = \vec{u}$.

Distanza retta punto.

Sia P_1 un punto non appartenente alla retta r. Sia P_o un punto di r. Allora se $\vec{v}$ è il versore direttore della retta r tale che $\vec{P_oP_1} \cdot \vec{v} \geq 0$, secondo quello visto nel paragrafo precedente $(\vec{P_oP_1} \cdot \vec{v})\vec{v}$ è la proiezione ortogonale del vettore $\vec{P_oP_1}$ sulla retta r.

Sia P_2 il punto della retta r tale che $\vec{P_oP_2} = (\vec{P_oP_1} \cdot \vec{v})\vec{v}$. Allora valgono le seguenti proprietà:

1) $\vec{P_1P_2}$ è ortogonale alla retta r.

2) $|\vec{P_1P_2}| \leq |\vec{P_1P}|$ per ogni punto P della retta r.

(Per verificare 1) basta verificare che $\vec{P_oP_2} \cdot \vec{P_1P_2} = 0$, mentre 2) è vera perchè i cateti sono sempre piu corti dell'ipotenusa.)

Da queste due osservazioni è naturale dare la seguente

Definizione 1.6 *La distanza tra un punto $P_1 \notin r$ e la retta r di vettore direttore $\vec{v}$ è data dalla norma del vettore $|\vec{P_1P_2}|$ dove P_2 è il punto di r tale che $\vec{P_1P_2}$ è ortogonale a $\vec{v}$.*

Per calcolare tale distanza, scegliamo $\vec{v}$ tale che $|\vec{v}| = 1$ e scegliamo P_0 un punto di r. Si ricorda che

$$|\vec{v} \wedge \vec{P_oP_1}| = |\vec{v}|h$$

dove h è l'altezza del parallelogramma costruito sui due vettori $\vec{v}$ e $\vec{P_oP_1}$. Ma dunque $h = |\vec{P_1P_2}|$. Abbiamo ottenuto che

$$d(P_1, r) := |\vec{v} \wedge \vec{P_oP_1}|$$

se $|\vec{v}| = 1$.

Distanza punto piano.

Sia il piano π di equazione $ax + by + cz = d$ e sia $P_1 \notin \pi$. Chiaramente con un raggionamento simile al caso precedente se P_2 è il punto di π tale che $\vec{P_2P_1}$ è ortogonale al piano π allora $|\vec{P_1P_2}| \leq |\vec{P_1P}|$ per ogni punto P del piano π.

Definizione 1.7 *La distanza tra un punto $P_1 \notin \pi$ e il piano π è dato dalla norma del vettore $|\vec{P_1P_2}|$ dove P_2 è il punto di π tale che $\vec{P_1P_2}$ è ortogonale al piano π.*

Si ricorda che il vettore $\vec{n} = (a, b, c)$ è ortogonale al piano π. Sia $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ un punto del piano cioè tale che $ax_o + by_o + cz_o = d$. Chiaramente
$|\vec{P_1P_2}| = |\vec{P_oP_1}| \cos \alpha$
dove α è l'angolo tra P_oP_1 e la normale al piano (fare il disegno e osservare che P_oP_1 è l'ipotenusa del triangolo $P_oP_1P_2$). Quindi

$$|\vec{P_1P_2}| = |\vec{P_oP_1} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}|$$

ricordando che $|\vec{n}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ e usando la formula che definisce il prodotto scalare tra due vettori si ottiene

$$|\vec{P_1P_2}| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}|a(x_1-x_o)+b(y_1-y_o)+c(z_1-z_o)|.$$

Ora basta usare il fatto che $ax_o+by_o+cz_o = d$ e la formula diventa

$$d(P_1,\pi) = |\vec{P_1P_2}| = \frac{|d-(ax_1+by_1+cz_1)|}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}.$$

Un modo di interpretare questa distanza è di pensare che il piano π_1 parallelo a π e passante per il punti P_1 ha come equazione cartesiana $ax+by+cz = d'$ dove $d' = ax_1+by_1+cz_1$. Chiaramente la distanza tra P_1 e π è uguale alla distanza tra i due piani π e π':

$$d(\pi,\pi') = \frac{|d-d'|}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}.$$