**Matematica I, I. Birindelli**

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3},\quad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}$$

2)Dimostrare che l'equazione $\cos x = x$ ha una soluzione nell'intervallo $[0,\pi/2]$.

3) Determinare i punti di massimo e minimo relativo e assoluto, e gli intervalli di monotonia per le seguenti funzioni considerate nei loro insiemi di definizione: $f(x) := x + 1/x$, $g(x) := \frac{x}{x^2+1}$, $h(x) := \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$, $k(x) := 2x + \frac{1}{x^2}$.

4) Sia $f(x) = \cos ax$, con $a \in \mathbb{R}$. Trovare l'espressione della derivata n-esima di f in un generico punto $x$.

5) Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-x-|x^2-x-2|}$$

con $x \in \mathbb{R}$.

6) Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-x}\left(\log|x| + \frac{x}{|x|}\right)$$

7) Siano $f$ e $g$ due funzioni continue in un intervallo $[a,b]$. Dimostrare che la funzione $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ è continua. (Dimostrare prima che $h(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) + \frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$, e usare poi le proprietà delle funzioni continue.

8) Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione cotan$x = x$ nell'intervallo $(0,\pi)$. (Facoltativo: Dimostrare che esistono infinite soluzioni dell'equazione in $\mathbb{R}$)

9) Sia $G$ il grafico della funzione $f(x) = 4x^3$. Determinare l'equazione di una retta passante per il punto $(0,\alpha)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$) e tangente a $G$.

10) Determinare l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$|\cos 2x| < \frac{1}{2}$$

11)Studiare il grafico della funzione $f(x) = e^{x+|x^2-1|}$ (determinare insieme di definizione, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), asintoti, punti angolosi, convessità e disegnare il grafico).

12) Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2x+3}{|x^2-1|+x^2}$$

In particolare determinare insieme di definizione, insiemi di monotonia, i punti di massimo o minimo (locali e non), asintoti, punti angolosi e disegnare il grafico.

13)Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+3}$ (determinare insieme di definizione, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), asintoti e disegnare il grafico).

14)Studiare il grafico della funzione $f(x) = 2\log|2x-3|$ (determinare insieme di definizione, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), asintoti e punti di discontinuita' e disegnare il grafico).

15)Studiare il grafico della funzione $f(x) = 2\sqrt{|2x-3|}$ (determinare insieme di definizione, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), asintoti e punti di discontinuita' e disegnare il grafico).

16)Studiare il grafico della funzione $f(x) = \log(x^2-2x-1)$ (determinare insieme di definizione, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo (locali e non), asintoti e disegnare il grafico).

17) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{|x|}(\sqrt{x^2+1} - x)$ (determinare: insieme di definizione, insiemi di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo, asintoti e disegnare il grafico).
18)Studiare il grafico della funzione

$$g(x) = \sin x + \cos x$$

In particolare determinare l'equazione della retta tangente nel punto $(0, g(0))$.
19)Studiare, nel suo dominio di definizione, il grafico della funzione

$$g(x) = \log(\sin x).$$

In particolare, determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(\frac{\pi}{4}, g(\frac{\pi}{4}))$.
20)Studiare, nel suo dominio di definizione, il grafico della funzione

$$g(x) = \log(\cos x).$$

In particolare, determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(\frac{\pi}{4}, g(\frac{\pi}{4}))$.
21)Studiare il grafico della funzione $g(x) = e^{-x^3+3x^2}$. In particolare determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di coordinate $(2, g(2))$.
22) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq a \\ x + 4 & x < a, \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}$.
23) Dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione

$$4x^2 - e^x = 0$$

nell'intervallo $[0, 1]$.
24) Sia dimostrare che esistono almeno due radici reali distinte dell'equazione $0 = x^4 + 7x^3 - 9$.
25)Trovare gli intervalli di Monotonia delle seguenti funzioni: $f(x) = (x-2)^5(2x+1)^4$, $g(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $h(x) = x - 2\sin x$, $k(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.
26) Trovare i domini di definizione delle seguenti funzioni $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$, $g(x) = \log(2^x - 2)$, $h(x) = \sqrt{\log\left(\frac{3}{x-2}\right)}$, $k(x) = \sqrt{\sin(2x)}$.
27)Determinare dominio di definizione e calcolare la derivata delle seguenti funzioni
$f(x) = (\log x)^x$, $g(x) = x^{\arctan x}$

28) Studiare il grafico delle seguenti funzioni
$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $g(x) = \frac{1}{\sin 3x}$, $h(x) = \sin x + \sin 2x$, $k(x) = \arctan \frac{1}{|x|}$.
29) Calcolare i seguenti limiti
$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$ (usare il fatto che $\sin \pi x = -\sin(\pi x - \pi)$.
30)Trovare gli intervalli di Monotonia delle seguenti funzioni: $f(x) = (x-2)^5(2x+1)^4$, $g(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $h(x) = x - 2\sin x$, $k(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.

31) Trovare i domini di definizione delle seguenti funzioni

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$, $g(x) = \log(2^x - 2)$, $h(x) = \sqrt{\log\left(\frac{3}{x-2}\right)}$, $k(x) = \sqrt{\sin(2x)}$.