

Ottavo foglio di Esercizi di Matematica I, 02/03

I. Birindelli

1) Determinare il massimo e minimo delle seguenti funzioni quando esistono

$$f(x) = \sin x^3, \quad g(x) = |x|+2, \quad h(x) = |x+2|, \quad k(x) = \sin 3x, \quad f_1(x) = x^2+x+1$$

$$f_2(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}, \quad f_3(x) = \cos \frac{x+2}{x-1}, \quad f_4(x) = x^3+x$$

Dire quali tra le precedenti funzioni presenta dei punti in cui la funzione non è derivabile.

2) Determinare la derivata della funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$ e determinare l'equazione della retta tangente in $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$.

3) Determinare la derivata delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x}}, \quad g(x) = \log \left(\frac{1}{x^2 + 3} \right), \quad h(x) = (\tan 2x + 3)^2, \quad f_1(t) = (\cos t^2)(\sin 3t).$$

4) Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità in 1 della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2+1} & x > 1 \\ 2ax + b & x \leq 1 \end{cases}$$

5) Dimostrare che il polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 7$ ammette al meno due radici reali.

6) Dimostrare che esiste un punto di $[-1, 3]$ tale che la retta tangente alla funzione $f(x) = x^2 + 3x$ sia parallela alla retta di equazione $y = 5x$. Disegnare la funzione f e la retta tangente.

7) Dovendo costruire un parallelepipedo di sezione quadrata fatto con due materiali: M_1 sulle 4 facciate verticali e M_2 sulle 2 facciate orizzontali, supponendo che C_1 il costo per centimetri quadri di M_1 è doppio rispetto a C_2 costo per centimetri quadri di M_2 e che il parallelepipedo debba avere un volume di 800 centimetri cubi, trovare il parallelepipedo più economico. Ripetere l'esercizio nel caso in cui $C_1 = 4C_2$. Che rapporto ci deve essere tra C_1 e C_2 affinché il parallelepipedo ottimale sia un cubo?

8) Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > a \\ bx - 1 & x \leq a \end{cases}$$

9) Determinare gli insiemi di monotonia delle funzioni

$$P(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 3, \quad f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), \quad Q(x) = \frac{2x+3}{x-4}, \quad g(x) = \frac{x^2+2x}{2x+3}.$$