Iterando s'impara. Modelli dinamici discreti

Scuola Estiva B (2 settembre 2020)
Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma

Stefano Finzi Vita (Matematica, Sapienza)

[Per vedere le slides della lezione e le soluzioni degli esercizi:
https://www.mat.uniroma1.it/persone/finzivita ,
sezione Materiale didattico, Scuola Estiva 2020]

1 Metodi iterativi e modelli matematici

Alla base di molti algoritmi per la soluzione di problemi ci sono operazioni semplici da ripetere più volte (un ciclo) partendo da valori iniziali (dati in input), spesso con l'aiuto di un computer. Con gli stessi ingredienti è possibile costruire dei modelli matematici per descrivere l'evoluzione di quantità che variano nel tempo (per tempi discreti) a partire da un dato iniziale, in modo da poter fare previsioni sul loro comportamento.

A secondo del contesto parleremo equivalentemente di: **metodi iterativi, successioni per ricorrenza, equazioni alle differenze** o **sistemi dinamici discreti**. Vediamo un primo paio di esempi.

ESEMPIO 1. Un allevamento di pesci

Un imprenditore avvia con 100 pesci un allevamento di una specie che ha un tasso medio mensile di crescita del 30%, e vuole prelevarne ogni mese una quantità da vendere. Se per ogni mese n indichiamo con x_n il numero di pesci presenti e con p_n la quantità di pescato, si vogliono confrontare gli effetti di due strategie differenti sull'evoluzione complessiva dell'allevamento, in modo da ottimizzare i guadagni senza mettere in pericolo l'attività rischiando l'estinzione della specie:
1) *prelievo costante* : $p_n = b > 0$; 2) *prelievo percentuale* : $p_n = rx_n$ (con $r < 1$) .
Quale strategia e quali parametri conviene scegliere all'imprenditore?

ESEMPIO 2. Domanda e offerta

Un industriale vuole tenere sotto osservazione il prezzo di un bene che produce, in base all'evoluzione del mercato, in modo da adeguare la sua produzione alla domanda. Il prezzo x_n, la domanda d_n e l'offerta s_n di esso sono monitorati ogni mese, e si evolvono secondo le leggi base dell'economia di mercato:

$$d_n = a - bx_n \quad (a, b > 0) \quad (\textit{equazione della domanda})$$

$$s_n = c + fx_{n-1} \quad (c \leq 0, f > 0) \quad (\textit{equazione della produzione})$$

$$s_n = d_n \quad (\textit{equazione di equilibrio del mercato})$$

In base ai parametri, cosa si può prevedere per l'andamento dei prezzi?

Negli esempi visti c'è una quantità variabile (una popolazione di pesci, il prezzo di un bene) che varia con cadenza fissa secondo una legge (una dinamica) **lineare** che dipende solo dal valore della stessa quantità nel periodo precedente, a partire da un **dato iniziale** (il primo nucleo di pesci immesso nel bacino, il prezzo del bene all'inizio della produzione). Possiamo formalizzare tutto questo come un **sistema dinamico discreto (in breve SDD) lineare a un passo**:

$$\text{Assegnato } x_0, \qquad x_{n+1} = F(x_n) := ax_n + b, \qquad \text{per ogni } n = 0, 1, 2, ... \quad (*)$$

e calcolare come vari nel tempo la quantità x_n in base ai valori della dinamica F (in questo caso dei parametri a e b) e del dato iniziale x_0. Sarà soprattutto interessante capire se il sistema ha un comportamento tendenziale: si avvicina per esempio ad un valore preciso, oppure oscilla tra più valori, ecc..

Esercizio 1 *Ricavare le leggi ricorsive $x_{n+1} = F(x_n)$ che descrivono i fenomeni illustrati negli Esempi 1 e 2, verificandone la linearità.*

2 Equilibri, orbite, comportamento asintotico, stabilità

Un **equilibrio** è uno stato stabile del sistema dinamico, cioè un valore x^* tale che

$$x^* = F(x^*) \, .$$

In altre parole è un **punto fisso** della funzione F, e se lo assumessimo come dato iniziale genererebbe una sequenza di valori tutti uguali a x^*.

Definiremo invece **orbita** (o **traiettoria**) del sistema la sequenza di valori generata da un particolare dato iniziale, cioè la successione dei valori

$$x_0, \; x_1 = F(x_0), \; x_2 = F(x_1), ..., \; x_n = F(x_{n-1}), \; x_{n+1} = F(x_n), ...$$

Un'orbita $(z_1, z_2, ..., z_k)$ si dirà **periodica** (di periodo k) se: $F(z_1) = z_2, F(z_2) = z_3, ..., F(z_{k-1}) = z_k, F(z_k) = z_1$ (k valori che si ripetono sempre nello stesso ordine).

Il **comportamento asintotico** del sistema esprime le proprietà delle orbite nel tempo (monotonia, periodicità, convergenza all'equilibrio, divergenza).

Un equilibrio si dice **stabile** se ogni orbita innescata da un valore vicino all'equilibrio resta nel tempo vicina all'equilibrio, **asintoticamente stabile** se tende all'equilibrio, **instabile** se se ne allontana.

Nel caso lineare a un passo l'**unico equilibrio** (per $a \neq 1$) è il valore x^* tale che

$$x^* = ax^* + b \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{b}{1-a}$$

Nel caso generale possono invece esistere più equilibri per la stessa dinamica, e il loro calcolo potrebbe non essere semplice.

Esercizio 2 *Determinare i punti fissi delle seguenti dinamiche:*

$$1) \; x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{2}{3}; \quad 2) \; x_{n+1} = 4x_n - 12; \quad 3) \; x_{n+1} = x_n^2 - \frac{3}{4}.$$

Esercizio 3 *Determinare i primi 5 valori dell'orbita relativa al sistema dinamico $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 4$, prendendo come dato iniziale una prima volta $x_0 = 0$, una seconda $x_0 = 12$; confrontare tali valori con il punto fisso del SDD.*

Esercizio 4 *(*) Dimostrare che se (z_1, z_2) è un'orbita 2-periodica del nostro SDD, allora z_1 e z_2 saranno punti fissi della dinamica $F^2 = F \circ F$.*

3 L'output

Con l'aiuto di un computer possiamo generare facilmente i valori numerici di un SDD, e metterli in una tabella. Per esempio, se il sistema è

$$x_{n+1} = x_n/2 + 1/4, \quad x_0 = 0.1 \ ,$$

otteniamo i valori della Tabella 1 che sembrano crescere verso 0.5, che è proprio l'equilibrio del nostro SDD.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_n	0.1	0.3	0.4	0.45	0.475	0.487	0.493	0.496	0.498	0.499

Tabella 1: I primi 10 valori della sequenza

Per vederlo meglio possiamo anche rappresentare graficamente l'andamento del sistema. In modo tradizionale, disegnando nel piano cartesiano i punti (n, x_n) (gli stati del sistema in funzione dei tempi discreti) [Figura 1.a].

Ma possiamo anche visualizzare cosa succede mediante il cosiddetto **diagramma della ragnatela** (in inglese *cobweb diagram*) nel piano (x, y) : immaginate un ragnetto che si muova dal punto iniziale (x_0, x_0) tessendo la sua tela verticalmente verso il grafico della retta $y = ax + b$ che definisce la dinamica e di qui orizzontalmente verso quello della retta $y = x$: il punto raggiunto sarà (x_1, x_1), con $x_1 = F(x_0)$; ripetendo queste azioni il percorso tracciato ci darà informazioni molto chiare sul comportamento della sequenza e sulla sua stabilità [Figura 1.b].

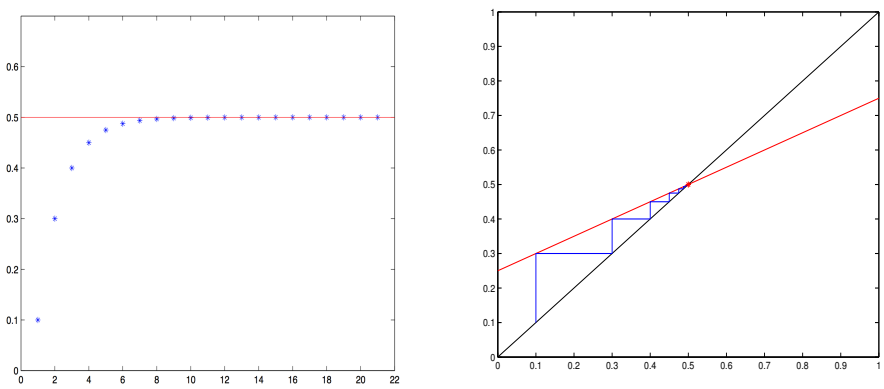

Figura 1: $F(x) = x/2 + 1/4$, $x_0 = 0.1$: a) graf. standard, b) diagr. della ragnatela

Proviamo, aiutandoci con la grafica, a caratterizzare il comportamento dei nostri SDD lineari a un passo in funzione dei parametri a e b e del dato iniziale x_0, specie rispetto al valore di equilibrio (osservate che a corrisponde al coefficiente angolare della retta che esprime la dinamica). In alcuni casi sarà possibile ricavare l'espressione esplicita di x_n in funzione dei parametri (*forma chiusa del sistema*). Partiamo dai casi più semplici:

- Se $b = 0$ (caso omogeneo), che si può dire della retta? Provate che il sistema ammette la forma chiusa: $x_n = a^n x_0$, cioè la sequenza equivale ad

una **progressione geometrica** di ragione a (moltiplicata per il dato iniziale). Ricavate quindi il comportamento che avrà in funzione del valore di a.

Esercizio 5 Crescita di una popolazione (modello Malthusiano). *Si suppone che il numero di individui x_n di una popolazione al tempo n sia pari a τ volte quello degli individui del periodo precedente [$(\tau - 1)$ indica il tasso intrinseco di crescita, differenza tra i tassi di natatalità e di mortalità]. Scrivere il SDD corrispondente. Provare che c'è crescita (esponenziale) se $\tau > 1$, estinzione se $\tau < 1$ (si parla di estinzione quando i valori della sequenza diventano nulli o negativi).*

- Se $a = 1$ e $b \neq 0$ che si può dire della retta? Cosa potete dedurne rispetto agli equilibri e all'andamento della sequenza? La sua forma chiusa è $x_n = x_0 + nb$, **progressione aritmetica** di ragione b.
- Se $a = -1$ e $b \neq 0$ che si può dire della retta? Qual è l'equilibrio? Come si comporta la sequenza? Cosa fornisce il diagramma della ragnatela?

I casi non banali restano $|a| < 1$ e $|a| > 1$. Ragionateci da soli con i prossimi esercizi, partendo in ogni esempio dal calcolo del punto fisso e usando la ragnatela.

Esercizio 6 *Disegnare l'andamento del SDD $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1$, partendo una prima volta da $x_0 = 1$ e una seconda da $x_0 = 3$.*

Esercizio 7 *Disegnare l'andamento del SDD $x_{n+1} = -\frac{x_n}{2} + 3$, partendo una prima volta da $x_0 = 1$ e una seconda da $x_0 = 3$.*

Esercizio 8 *Disegnare l'andamento del SDD $x_{n+1} = 2x_n - 1$, partendo da $x_0 = 0.9$ e del SDD $x_{n+1} = -2x_n + 3$, partendo da $x_0 = 1.1$.*

In base alle simulazioni fatte provate ora a fare delle congetture sul comportamento asintotico delle sequenze :

Esercizio 9 *Discutere la stabilità dell'equilibrio (asintoticamente stabile o instabile) in funzione del valore di a, e l'andamento della sequenza (monotono, cioè crescente o decrescente, oppure oscillante) in funzione del segno di a.*

In generale, se $|a| \neq 1$, la successione si può sempre riscrivere in forma chiusa (esplicita): se x^* è l'equilibrio, si dimostra che

$$x_{n+1} = (x_0 - x^*)a^n + x^* \ . \quad (**)$$

Verificate direttamente a partire da $(**)$ se le congetture fatte sono corrette.

4 Applicazione agli esempi iniziali

Esercizio 10 *Il problema della pesca (ESEMPIO 1):*
- **prelievo costante***: calcolare il punto fisso del SDD e ragionare sulla scelta ottimale di b in grado di massimizzare il numero di pesci nell'allevamento e quelli venduti al mercato al termine del primo anno (reddito costante).*
- **prelievo percentuale***: calcolare il punto fisso del SDD e suggerire una percentuale di prelievo in grado di far crescere l'allevamento e di garantire un reddito crescente.*

Esercizio 11 *Il problema del mercato (ESEMPIO 2):*
- calcolare il prezzo di equilibrio del SDD in funzione dei parametri a, b, c, f;
- mostrare che i prezzi necessariamente oscilleranno, e determinare una condizione sui coefficienti che li spinga ad avvicinarsi al prezzo di equilibrio.

5 E se complichiamo le cose?

- **Due dinamiche lineari a un passo alternate**

$$F_1(x) = \frac{x}{3}, \quad F_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \qquad x_{n+1} = F(x_n) := \begin{cases} F_1(x_n) & \text{se } n \text{ è pari} \\ \\ F_2(x_n) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Esercizio 12 *Cosa succede? La sequenza sarà attratta dal punto fisso di F_1 ($x = 0$), da quello di F_2 ($x = 1$), oscillerà tra i due, o succede altro? Provate a mostrarlo graficamente partendo ad esempio da $x_0 = 0.1$ (dovrete disegnare tre rette !) .*

- **Due dinamiche lineari a un passo scelte ogni iterazione a caso** (per esempio tirando una moneta)

$$x_{n+1} = F(x_n) := \begin{cases} F_1(x_n) & \text{se esce testa} \\ \\ F_2(x_n) & \text{se esce croce} \end{cases}$$

Stavolta non è facile rispondere senza un computer, e la risposta è sorprendente: l'attrattore non è un singolo valore, nemmeno un'orbita periodica, bensì **un insieme infinito** (con la potenza del continuo!) di tipo frattale, noto come **insieme di Cantor**, individuabile mediante le intersezioni del diagramma della ragnatela con la retta bisettrice.

- **Una dinamica lineare a due passi (omogenea)**

$$x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}) := ax_n + bx_{n-1}$$

Anche in questo caso esistono forme chiuse per la sequenza. Ad esempio i famosi numeri di Fibonacci sono generati dal SDD: $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $x_1 = x_2 = 1$, ma anche dalla **formula di Binet**:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

che esplicita il legame della sequenza con la **sezione aurea**, e ci mostra anche che in questo caso per generare numeri interi dobbiamo passare attraverso potenze di numeri che non sono neppure razionali !!!

- **Una dinamica non lineare**
Con funzioni quadratiche (il cui grafico sarà quindi una parabola), si trovano comportamenti ancora più interessanti, come il fenomeno caotico relativo al celebre modello della **mappa logistica** che simula l'evoluzione di una popolazione biologica in una situazione di risorse limitate.
Ma questa è un'altra storia...