Corso di laurea in Chimica Industriale, a.a. 2018/19

Matematica II

Esercizio tipo del secondo esonero, con argomenti di teoria.

Data la funzione

$$f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$$

e l'insieme

$$D = \{(x,y) : \ x^2 + (2y-1)^2 \leq 4\}$$

(i) si dimostri che $f_{|D}$ ammette massimo e minimo, giustificando la risposta;

(ii) si trovino massimo e minimo assoluto;

(iii) si dica se esistono punti interni a D di estremo locale.

Soluzione.
(i) Si puó applicare il teorema di Weierstrass, infatti:
∘ La funzione f é continua;
∘ L'insieme D é
- chiuso, (*Questo segue dal teorema 3.5, infatti la funzione* $g(x,y) = x^2 + (2y-1)^2 - 4$ *é continua.*)
- limitato. (*Infatti da* $x^2 + (2y-1)^2 \leq 4$ *segue*

$$\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |2y-1| \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| = \frac{|2y|}{2} \leq \frac{|2y-1|+|1|}{2} \leq \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{4+\frac{9}{4}} \leq \frac{5}{2})$$

(ii) Si cercano i punti di D candidati ad essere punti di estremo locale, tra questi ci saranno i punti di estremo assoluto.

$$D = \overset{\circ}{D} \cup \partial D$$

dove

$$\overset{\circ}{D} = \{(x,y) : \ x^2 + (2y-1)^2 < 4\} \qquad \partial D = \{(x,y) : \ x^2 + (2y-1)^2 = 4\}$$

Si usano strumenti diversi per cercare i punti di estremo di f nell'insieme aperto (per il teorema 3.5) $\overset{\circ}{D}$ e nella curva ∂D.

- **Cerchiamo i punti di estremo per** $f_{|\overset{\circ}{D}}$.

(*Per il teorema di Fermat, i punti di estremo locale interni a* D*, e cioé appartenenti all'insieme aperto* $\overset{\circ}{D}$ *sono punti critici o punti in cui la funzione non é derivabile. La funzione é derivabile in tutti i punti e quindi si dercano i punti critici.*)

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha l'unica soluzione $(0,0)$. **Si osservi che** $(0,0) \in \overset{\circ}{D}$**.**
L'unico punto interno a D **candidato ad essere punto di estremo é** $(0,0)$**.**

(*Si osservi che stiamo cercando gli estremi* **assoluti** *. Non ha quindi senso, a questo punto, studiare la natura del punto critico trovato. Infatti lo studio della forma quadratica differenziale secondo, e quindi della matrice Hessiana, dice solo se il punto critico é o non é di estremo* **locale**.)

- I punti di estremo per $f_{|D}$ che stanno in ∂D, sono anche di estremo per $f_{|\partial D}$. **Cerchiamo i punti di estremo per** $f_{|\partial D}$.

I metodo (moltiplicatori di Lagrange)
(*É conveniente utilizzare questo metodo perché la curva é data in forma "implicita".*
Si cercano i punti delle curva in cui $\nabla f(x,y)$ *é parallelo a* $\nabla g(x,y)$*. Questi sono i punti critici della Lagrangiana*

$$\mathrm{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y) = 1 + x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + (2y-1)^2 - 4)$$

cioé le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - \lambda 2x = 0 \\ -2y - \lambda 4(2y-1) = 0 \\ x^2 + (2y-1)^2 = 4 \end{cases} \equiv \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ y + 2\lambda(2y-1) = 0 \\ x^2 + (2y-1)^2 = 4 \end{cases} = \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ (1+4\lambda)y - 2\lambda = 0 \\ x^2 + (2y-1)^2 = 4 \end{cases}$$

(*Conviene cercare per prime le soluzioni della prima equazione*).
La prima equazione ha soluzioni $x = 0$ e $\lambda = 1$.
Sostituendo $x = 0$ nella terza equazione, si ottiene

$$(2y-1)^2 = 4$$

$$|2y-1| = 2$$

$$y = \frac{3}{2},\ y = -\frac{1}{2}$$

e quindi i punti $(0, \frac{3}{2})$ e $(0, -\frac{1}{2})$.
Sostituendo $\lambda = 1$ nella seconda equazione, si ottiene $y = \frac{2}{5}$, che, sostituito nella terza, da $x = \pm\frac{3\sqrt{11}}{5}$, e quindi i punti $(\frac{3\sqrt{11}}{5}, \frac{2}{5})$ e $(-\frac{3\sqrt{11}}{5}, \frac{2}{5})$.
I punti sulla frontiera ∂D candidati ad essere punti di estremo sono

$$(0, \frac{3}{2}),\ (0, -\frac{1}{2}),\ (\frac{3\sqrt{11}}{5}, \frac{2}{5}),\ (-\frac{3\sqrt{11}}{5}, \frac{2}{5})$$

II metodo (sconsigliato)
Si cerca una rappresentazione parametrica di ∂D.
L'equazione

$$x^2 + (2y-1)^2 = 4$$

é equivalente a

$$(\frac{x}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$$

Si pone

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \cos t \\ y - \frac{1}{2} = \sin t \end{cases}$$

e quindi

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t + \frac{1}{2} \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$f_{|\partial D} = F(t) = f(\underline{r}(t)).$$

Per il teorema di Fermat, i punti di $[0, 2\pi]$ candidati a essere di estremo per $F(t)$ sono $0, 2\pi$ e i punti in cui $F'(t) = 0$ oppure non esiste.
A $t = 0$ e a $t = 2\pi$ corrisponde il punto della curva $(2, \frac{1}{2})$.
$F(t)$ é derivabile in ogni punto, perché f é differenziabile e $\underline{r}(t))$ derivabile.

$$F'(t) = \nabla f(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) = (4\cos t, -2\sin t - 1) \cdot (-2\sin t, \cos t) = -8\sin t\cos t - 2\sin t\cos t - \cos t = -\cos t(10\sin t + 1)$$

$F'(t) = 0$, se $\cos t = 0$ oppure $\sin t = -\frac{1}{10}$.
Se $\cos t = 0$, $\sin t = \pm 1$. A questi valori corrispondono i punti della curva $(0, \frac{3}{2})$ e $(0, -\frac{1}{2})$.
Se $\sin t = -\frac{1}{10}$, $cost = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{100}} = \pm\frac{3\sqrt{11}}{10}$. A questi valori corrispondono i punti della curva $(\frac{3\sqrt{11}}{5}, \frac{2}{5})$ e $(-\frac{3\sqrt{11}}{5}, \frac{2}{5})$.
I punti sulla frontiera ∂D candidati ad essere punti di estremo sono

$$(2, \frac{1}{2}),\ (0, \frac{3}{2}),\ (0, -\frac{1}{2}),\ (\frac{3\sqrt{11}}{5}, \frac{2}{5}),\ (-\frac{3\sqrt{11}}{5}, \frac{2}{5})$$

Si osservi che non é stato necessario scrivere esplicitamente $F(t)$, infatti, utilizzando il teorema della derivata della funzione composta, abbiamo derivato $F(t)$ utilizzando solo $\nabla f(x, y)$, $\underline{r}(t))$ e $\underline{r}'(t))$.
Si poteva, ma é sconsigliato, scrivere

$$F(t) = f(\underline{r}(t) = 1 + (2\cos t)^2 - (\sin t + \frac{1}{2})^2 = 1 + 4 - 5\sin^2(t) - \sin t - \frac{1}{4} = \frac{19}{4} - 5\sin^2(t) - \sin t$$

e, derivando, ritrovare

$$F'(t) = -10\sin t\cos t - cost$$

Calcoliamo il massimo e il minimo di $f_{|D}$

$$\mathrm{Max} f_{|D} = \mathrm{Max}\{f(0,0),\ f(0,\frac{3}{2}),\ f(0,-\frac{1}{2}),\ f(\frac{3\sqrt{11}}{5},\frac{2}{5}),\ f(-\frac{3\sqrt{11}}{5},\frac{2}{5})\}$$

$$\min f_{|D} = \min\{f(0,0),\ f(0,\frac{3}{2}),\ f(0,-\frac{1}{2}),\ f(\frac{3\sqrt{11}}{5},\frac{2}{5}),\ f(-\frac{3\sqrt{11}}{5},\frac{2}{5})\}$$

$$f(0,0) = 1,\ f(0,\frac{3}{2}) = -\frac{5}{4},\ f(0,-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4},\ f(\frac{3\sqrt{11}}{5},\frac{2}{5}) = f(-\frac{3\sqrt{11}}{5},\frac{2}{5}) = \frac{24}{5}$$

(*Osservazione: se si é usata la parametrizzazione della curva, si deve calcolare anche* $f(2,\frac{1}{2}) = \frac{19}{4}$.)

$$\mathrm{Max} f_{|D} = f(\pm\frac{3\sqrt{11}}{5},\frac{2}{5}) = \frac{24}{5},\quad \min f_{|D} = f(0,\frac{3}{2}) = -\frac{5}{4}$$

(iii) $(0,0)$ é l'unico punto interno candidato a essere punto di estremo locale.
La matrice Hessiana

$$h_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ha determinante $|h_f(x,y)| = -4 < 0$. Il punto $(0,0)$ é di sella.