Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2018/19

Analisi (M.V. Marchi)

Scheda 8 con integrali indefiniti invece che integrali definiti – 10 dicembre 2018

Esercizio 1. Usare la formula di de l'Hôpital o gli sviluppi di Taylor per calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-\cos(x)}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x^2}}{x\sin(2x)},\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right),\qquad \lim_{x\to+\infty}x^3\left\{\frac{1}{x}-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(2x)}{\sin^2 x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-e^x+1}{x\,e^x-\sin x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\arctan x}{1-\cos x}$$

Esercizio 2. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine n in x_0 delle seguenti funzioni

i. $f(x)=x-\sin x,\quad x_0=0,\ n=5,$ **ii.** $f(x)=e^{x-1}-\cos(2\pi x),\quad x_0=1,\ n=4,$

iii. $f(x)=x\arctan x,\quad x_0=0,\ n=2,$ **iv.** $f(x)=\dfrac{1}{1-x},\quad x_0=2,\ n=2,$

v. $f(x)=\sqrt{1+x},\quad x_0=0,\ n=3,$ **vi.** $f(x)=\sqrt{1+x},\quad x_0=2,\ n=3$

vii. $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad x_0=1,\ n=3,$ **viii.** $f(x)=x^4+x-2,\quad x_0=1,\ n=4$

Esercizio 3. Determinare a,b,c tali che

$$e^x=\frac{a+b\,x}{1+c\,x}+o(x^2)\qquad \text{per}\quad x\to 0.$$

Esercizio 4. **i.** Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 in 0 della funzione $\dfrac{1}{1-x}$.

ii. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 in 0 della funzione $\dfrac{1}{1-f(x)}$ nei casi seguenti

$$f(x)=x+\varepsilon x^2\quad(\varepsilon\in\mathbb{R}),\qquad f(x)=x\,e^x,\qquad f(x)=\sin x.$$

iii. Data una funzione $f=f(x)$ derivabile due volte e tale che $f(0)=0$, scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 in 0 della funzione $\dfrac{1}{1-f(x)}$.

Esercizio 5. Calcolare i seguenti integrali

$$\int 2^{-3x}\,dx\qquad \int\log_{10}(3x)\,dx\qquad \int\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$\int\frac{1}{\sin(x)}\,dx\qquad \int\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx\qquad \int\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

$$\int\frac{x}{e^{(x^2)}}\,dx\qquad \int\frac{x}{\cos^2(x)}\,dx\qquad \int\log(x^2)\,dx\qquad \int\log^2(x)\,dx$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\qquad \int\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx\qquad \int\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx\qquad \int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$$

Esercizio 6. Data l'equazionie differenziale $y'=y(1-y)$

i) si dimostri che le funzioni costanti $y(x)\equiv 0$ e $y(x)\equiv 1$ sono soluzioni;

ii) si trovino le altre soluzioni;

iii) si abbozzi il grafico per $x\geq 0$ della soluzione che soddisfa la condizione $y(0)=2$ e di quella che soddisfa la condizione $y(0)=\frac{1}{2}$

Esercizio 7. Si dimostri che le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) = \frac{\log x}{1+x}$ hanno minimo in $x_0 = 1$

Esercizio 8. Si scriva la formula di Taylor di ordine 2 e centro $x_0 = 1$, con il resto di Peano, della funzione che soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{cases} y'(x) = e^{(x^2-1)} + \frac{\log x}{1+x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 9. Si scriva la formula di Taylor di ordine 2 e centro $x_0 = 0$, con il resto di Peano, della funzione che soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)(e^{x^2} + 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$