

Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2015/16

Analisi (L. Fanelli - M. Marchi - P. Vernole - A. Pisante)

Prima prova in itinere – 13 novembre 2015 – I

Regolamento. Annerire in modo evidente un'opzione a scelta fra V (vero) ed F (falso). Sarà assegnato un punteggio di 1 per ogni risposta giusta, 0 per ogni risposta non data e $-\frac{1}{2}$ per ogni risposta sbagliata.

Matricola _____
Cognome _____
Nome _____

1. Siano $A := \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ e $B = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right]$.

- | | | | |
|----|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1A | $A \cap B = \emptyset$ | V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 1B | $B \subset A$ | V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 1C | $A \cup B$ ha infiniti elementi | <input checked="" type="checkbox"/> V | F |
| 1D | $\sup(A \cap B) = 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> V | F |

3. Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ una successione crescente e b_n decrescente ed infinitesima.

- | | | | |
|----|----------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 3A | $a_n + b_n$ è crescente | V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 3B | $a_n b_n$ è decrescente | V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 3C | $\frac{a_n}{b_n}$ è crescente | <input checked="" type="checkbox"/> V | F |
| 3D | $\frac{b_n}{a_n}$ è infinitesima | <input checked="" type="checkbox"/> V | F |

2. Sia $f(x) = \arctan(1 - e^x)$.

- | | | | |
|----|-------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 2A | f è limitata | <input checked="" type="checkbox"/> V | F |
| 2B | f è crescente | V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 2C | f è dispari | V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 2D | $f(x) = 2$ ha soluzioni | V | <input checked="" type="checkbox"/> F |

4. Siano $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$.

- | | | | |
|----|--|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 4A | esiste $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ | <input checked="" type="checkbox"/> V | F |
| 4B | esiste $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x)$ | <input checked="" type="checkbox"/> V | F |
| 4C | $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{1 + g(x)} = 1$ | V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 4D | $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 0$ | V | <input checked="" type="checkbox"/> F |

5. Data la successione $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{(-1)^n}{1+n^2}$, stabilire se:

- (i) a_n è monotona
- (ii) a_n è positiva
- (iii) a_n è limitata
- (iv) a_n è convergente

Studiare inoltre la convergenza semplice e la convergenza assoluta della serie $\sum a_n$.

6. Sia $f(x) = \frac{\log(1+2x)}{(e^x-1)}$.

- (i) determinare il dominio di f
- (ii) determinare i limiti di f per x che tende ai valori $-\frac{1}{2}$, 0 , $+\infty$
- (iii) dimostrare che l'equazione $f(x) = 1$ ammette almeno una soluzione reale
- (iv) dimostrare che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che la funzione

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua su $(-\frac{1}{2}, +\infty)$. Per tale scelta di α , determinare l'immagine di g .

Matricola

Cognome

Nome

Matricola

Cognome

Nome

Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2015/16

Analisi (L. Fanelli - M. Marchi - P. Vernole - A. Pisante)

Prima prova in itinere – 13 novembre 2015 – II

Regolamento. Annerire in modo evidente un'opzione a scelta fra V (vero) ed F (falso). Sarà assegnato un punteggio di 1 per ogni risposta giusta, 0 per ogni risposta non data e $-\frac{1}{2}$ per ogni risposta sbagliata.

Matricola _____
Cognome _____
Nome _____

1. Sia $f(x) = \arctan(1 - e^x)$.

- | | | | |
|----|--------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1A | f è decrescente | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 1B | f è illimitata inferiormente | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 1C | $f(x) = 4$ ha soluzioni | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 1D | f è dispari | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |

3. Siano $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x$.

- | | | | |
|----|---|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 3A | esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 3B | esiste $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 3C | $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = 1$ | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 3D | $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |

2. Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ una successione crescente e b_n decrescente ed infinitesima.

- | | | | |
|----|----------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 2A | $a_n + b_n$ è decrescente | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 2B | $\frac{b_n}{a_n}$ è infinitesima | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 2C | $a_n b_n$ è crescente | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 2D | $\frac{b_n}{a_n}$ è decrescente | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |

4. Siano $A := \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ e $B = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right]$.

- | | | | |
|----|--------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 4A | $A \cup B$ è un insieme finito | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 4B | $A \cap B \neq \emptyset$ | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 4C | $\sup(A \cap B) = 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 4D | $A \subset B$ | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |

5. Data la successione $a_n = \frac{1}{1+n^2} \sin \frac{(-1)^n}{n}$, stabilire se:

- (i) a_n è monotona
- (ii) a_n è positiva
- (iii) a_n è limitata
- (iv) a_n è convergente

Studiare inoltre la convergenza semplice e la convergenza assoluta della serie $\sum a_n$.

6. Sia $f(x) = \frac{(e^x - 1)}{\log(1 + 2x)}$.

- (i) determinare il dominio di f
- (ii) determinare i limiti di f per x che tende ai valori $-\frac{1}{2}$, 0 , $+\infty$
- (iii) dimostrare che l'equazione $f(x) = 1$ ammette almeno una soluzione reale
- (iv) dimostrare che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che la funzione

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua su $(-\frac{1}{2}, +\infty)$. Per tale scelta di α , determinare l'immagine di g .

Matricola

Cognome

Nome

Matricola

Cognome

Nome

Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2015/16

Analisi (L. Fanelli - M. Marchi - P. Vernole - A. Pisante)

Prima prova in itinere – 13 novembre 2015 – III

Regolamento. Annerire in modo evidente un'opzione a scelta fra V (vero) ed F (falso). Sarà assegnato un punteggio di 1 per ogni risposta giusta, 0 per ogni risposta non data e $-\frac{1}{2}$ per ogni risposta sbagliata.

Matricola _____
Cognome _____
Nome _____

1. Siano $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$.

1A $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{1+g(x)} = 1$ V F

1B $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 0$ V F

1C esiste $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ V F

1D esiste $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x)$ V F

3. Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ una successione crescente e b_n decrescente ed infinitesima.

3A $\frac{b_n}{a_n}$ è infinitesima V F

3B $a_n + b_n$ è crescente V F

3C $\frac{a_n}{b_n}$ è crescente V F

3D $a_n b_n$ è decrescente V F

2. Siano $A := \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ e $B = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right]$.

2A $B \subset A$ V F

2B $A \cap B = \{0\}$ V F

2C $\sup(A \cap B) = 0$ V F

2D $A \cup B$ ha infiniti elementi V F

4. Sia $f(x) = \arctan(1 - e^x)$.

4A f è illimitata superiormente V F

4B f è decrescente V F

4C $f(x) = 2$ ha soluzioni V F

4D f è pari V F

5. Data la successione $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{(-1)^n}{1+n^2}$, stabilire se:

- (i) a_n è monotona
- (ii) a_n è positiva
- (iii) a_n è limitata
- (iv) a_n è convergente

Studiare inoltre la convergenza semplice e la convergenza assoluta della serie $\sum a_n$.

6. Sia $f(x) = \frac{\log(1+2x)}{(e^x-1)}$.

- (i) determinare il dominio di f
- (ii) determinare i limiti di f per x che tende ai valori $-\frac{1}{2}$, 0 , $+\infty$
- (iii) dimostrare che l'equazione $f(x) = 1$ ammette almeno una soluzione reale
- (iv) dimostrare che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che la funzione

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua su $(-\frac{1}{2}, +\infty)$. Per tale scelta di α , determinare l'immagine di g .

Matricola

Cognome

Nome

Matricola

Cognome

Nome

Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2015/16

Analisi (L. Fanelli - M. Marchi - P. Vernole - A. Pisante)

Prima prova in itinere – 13 novembre 2015 – IV

Regolamento. Annerire in modo evidente un'opzione a scelta fra V (vero) ed F (falso). Sarà assegnato un punteggio di 1 per ogni risposta giusta, 0 per ogni risposta non data e $-\frac{1}{2}$ per ogni risposta sbagliata.

Matricola _____
Cognome _____
Nome _____

1. Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ una successione crescente e b_n decrescente ed infinitesima.

- | | | | |
|----|----------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1A | $\frac{b_n}{a_n}$ è decrescente | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 1B | $\frac{b_n}{a_n}$ è infinitesima | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 1C | $a_n b_n$ è crescente | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 1D | $a_n + b_n$ è decrescente | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |

3. Siano $A := \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ e $B = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right]$.

- | | | | |
|----|--------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 3A | $A \cap B \neq \emptyset$ | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 3B | $\sup(A \cap B) = 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 3C | $A \subset B$ | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 3D | $A \cup B$ è un insieme finito | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |

2. Sia $f(x) = \arctan(1 - e^x)$.

- | | | | |
|----|--------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| 2A | f è illimitata inferiormente | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 2B | f è crescente | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 2C | f è dispari | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 2D | $f(x) = 4$ ha soluzioni | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |

4. Siano $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x$.

- | | | | |
|----|---|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 4A | esiste $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 4B | $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 4C | $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = 1$ | <input type="checkbox"/> V | <input checked="" type="checkbox"/> F |
| 4D | esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ | <input checked="" type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |

5. Data la successione $a_n = \frac{1}{1+n^2} \sin \frac{(-1)^n}{n}$, stabilire se:

- (i) a_n è monotona
- (ii) a_n è positiva
- (iii) a_n è limitata
- (iv) a_n è convergente

Studiare inoltre la convergenza semplice e la convergenza assoluta della serie $\sum a_n$.

6. Sia $f(x) = \frac{(e^x - 1)}{\log(1 + 2x)}$.

- (i) determinare il dominio di f
- (ii) determinare i limiti di f per x che tende ai valori $-\frac{1}{2}$, 0 , $+\infty$
- (iii) dimostrare che l'equazione $f(x) = 1$ ammette almeno una soluzione reale
- (iv) dimostrare che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che la funzione

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua su $(-\frac{1}{2}, +\infty)$. Per tale scelta di α , determinare l'immagine di g .

Matricola

Cognome

Nome

Matricola

Cognome

Nome