FISICA MATEMATICA
Prova scritta del 23 febbraio 2017

Cognome, nome, matricola .....

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,v,t) + (1-v)\partial_x u(x,v,t) + 2\partial_v[v\,u(x,v,t)] = 0 \\ u(x,v,0) = (x^2+v^2-1) \end{cases}$$

(i) determinare la soluzione del problema.
(ii)Sia $A = \{(x,v) : u_0(x,v) < 0\}$. Determinare $|A_t|$.

(i) La soluzione del problema è data dalla formula

$$u(x,v,t) = u_0\left(\varphi_1^{-t}(x,v), \varphi_2^{-t}(x,v)\right) e^{-\int_0^t ds\, \mathrm{div}\, F(\varphi^{s-t}(x,v))}$$

dove φ^t è il flusso associato all'EDO

$$\begin{cases} \dot{x} = 1-v \\ \dot{v} = 2v \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad \varphi^t(x,v) = \begin{pmatrix} x + t - \frac{1}{2}v(e^{2t}-1) \\ ve^{2t} \end{pmatrix}$$

e $F(x,v) = \begin{pmatrix} 1-v \\ 2v \end{pmatrix}$, da cui $\mathrm{div}\, F = 2$.

Quindi

$$u(x,v,t) = \left\{ \left[x - t - \tfrac{1}{2}v(e^{-2t}-1)\right]^2 + v^2 e^{-4t} - 1 \right\} e^{-2t}$$

(ii) Dal Teorema di Liouville

$$\frac{d}{dt}|A_t| = \int_{A_t} dz\, \mathrm{div}\, F(z) = \int_{A_t} dz\, 2 = 2|A_t|,$$

per cui $|A_t| = |A|e^{2t}$

$A = \{(x,v) : u_0(x,v) < 0\} = \{(x,v) : x^2+v^2 < 1\}$

A = cerchio di raggio 1 $\Rightarrow |A| = \pi$,

quindi $|A_t| = \pi e^{2t}$

Esercizio 2. Risolvere con il metodo di Fourier il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + f(x) & (x,t) \in (0,\pi)\times\mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 0, \quad \partial_t u(x,0) = 2\cos(3x/2)\sin(x/2) & \forall x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \forall t \geq 0, \end{cases}$$

per
(i) $f(x) = -2\sin x$;
(ii) $f(x) = x\sin x$. Discutere la regolarità della soluzione.

- Scriviamo la soluz. del problema come la somma della soluz. dell'equaz. omogenea associata e di una soluzione particolare con condizioni iniziali nulle, cioè

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) + u_p(x,t)$$

dove $\bar{u}$ risolve

$$(1)\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{u}(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}(x,t) & (x,t)\in(0,\pi)\times\mathbb{R}_+ \\ u(x,0)=0, \quad \partial_t u(x,0) = 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) & \forall x\in[0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \forall t\geq 0 \end{cases}$$

e u_p risolve

$$(2)\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u_p(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_p(x,t) + f(x) \\ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0 & \forall x\in[0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \forall t\geq 0 \end{cases}$$

- Determiniamo $\bar{u}$ con il metodo di Fourier

$$\bar{u}(x,t) = \sum_{n\geq 1}\sin(nx)\,w_n(t) \quad \text{dove} \quad \ddot{w}_n(t) = -\omega_n^2 w_n(t),$$

con $\omega_n = \sqrt{2}\,n$,

ovvero $w_n(t) = A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)$

- poiché $u(x,0)=0 \ \forall x\in[0,\pi] \Rightarrow w_n(0) \ \forall n\geq 1$, ovvero $A_n = 0 \ \forall n\geq 1$,

quindi $w_n(t) = B_n\sin(\omega_n t)$;

inoltre $\partial_t u(x,0) = 2\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(2x) - \sin x$,

per cui $\dot{w}_n(0) = 0$ se $n\neq 1$ o $n\neq 2$, $\Rightarrow B_n = 0 \ \forall n\neq 1, 2$

$\dot{w}_1(0) = 1$ e $\dot{w}_2(0) = 1 \Rightarrow \omega_1 B_1 = -1$, $\omega_2 B_2 = 1$

ovvero $w_n(t) \equiv 0 \ \forall n\neq 1, 2$

$w_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)$, $w_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2}t)$,

quindi $\bar{u}(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\sin(\sqrt{2}t) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(2x)\sin(2\sqrt{2}t)$

ii) cerchiamo u_p quando $f = -2\sin x$ (dati iniziali nulli)

$$u_p(x,t) = \sum_{n\geq 1} W_n(t)\sin(nx)$$

dove $\begin{cases} \ddot{W}_n(t) = W_n(t) + b_n \\ W_n(0)=0, \quad \dot{W}_n(0)=0 \end{cases}$, $\quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dx\, f(x)\sin(nx)$

$$\Rightarrow W_n(t) = \frac{b_n}{\omega_n^2}\left[1-\cos(\omega_n t)\right] \quad \forall\, n\geq 1$$

usando l'ortogonalità delle funz. trigonometriche si trova che

$b_n = 0 \quad \forall\, n\neq 1 \Rightarrow W_n(t)\equiv 0 \quad \forall\, n\neq 1$,

$b_1 = -2 \quad \Rightarrow W_1(t) = -\frac{2}{\omega_1^2}\left[1-\cos(\omega_1 t)\right] = -\left(1-\cos(\sqrt{2}t)\right)$,

quindi

$$u_p(x,t) = \sin x\left(\cos(\sqrt{2}t)-1\right)$$

e $u(x,t) = \bar{u}(x,t) + u_p(x,t)$.

iii) cerchiamo u_p quando $f(x) = x\sin x$;

in questo caso $\quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dx\, x\sin x\sin(nx) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi dx\, x\left[\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\right]$

$\Rightarrow b_1 = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\cos(2\pi)-1\right] = \frac{\pi}{2}$

e $\forall\, n\geq 2$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{(n-1)}\left[\cos[(n-1)\pi]-1\right] - \frac{1}{(n+1)}\left[\cos[(n+1)\pi]-1\right]\right\} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

ovvero $\forall\, n\geq 2$ $\quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è disp.} \\ -\frac{8}{\pi}\frac{n}{(n+1)^2(n-1)^2} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$

da cui

$$W_1(t) = \frac{\pi}{4}\left[1-\cos(\sqrt{2}t)\right]$$

e $\forall\, n\geq 2$ $\quad W_n(t) = 0$ se n è dispari; $\quad W_n(t) = -\frac{8}{\pi}\frac{1}{2n^2}\frac{n}{(n+1)^2(n-1)^2}\left[1-\cos(\sqrt{2}nt)\right]$

se n è pari;

quindi

$$u_p(x,t) = \frac{\pi}{4}\sin x\left[1-\cos(\sqrt{2}t)\right] - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n\geq 2\\ n \text{ pari}}}\frac{1}{n}\frac{1}{(n+1)^2}\frac{1}{(n-1)^2}\sin(nx)\left[1-\cos(n\sqrt{2}t)\right],$$

da cui si vede che $u_p \in C^3([0,\pi]\times\mathbb{R}_+)$.

Di nuovo

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) + u_p(x,t)$$

Esercizio 3.

(1) Sia $\Omega = (0, L) \times (0, 2)$. Risolvere l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ in Ω con condizioni al bordo $u(x, 0) = \sin(3\pi x/L)$ per $x \in [0, L]$, $u(L, y) = 2\sin(\pi y/2)$ per $y \in [0, 2]$, $u = 0$ sul resto della frontiera.

(2) Sia $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_2 < x_1\}$. Risolvere l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ in Ω con condizioni al bordo $u = x_1^2$ per $x_2 = 0$, $u = x_2^2$ per $x_1 = x_2$.

(1) $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$

dove u_1 è soluz. del problema $\Delta u_1 = 0$ in Ω, $u_1(x,0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$ per $x \in [0,L]$,

$u_1 = 0$ sul resto del bordo,

e u_2 è soluz. del problema $\Delta u_2 = 0$ in Ω, $u_2(L,y) = 2\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)$ $y \in [0,2]$,

$u_2 = 0$ sul resto del bordo

- determiniamo u_1, che cerchiamo nella forma

$$u_1(x,y) = \sum_n X_n(x)\, Y_n(y), \quad \text{dove} \quad \frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = -\frac{Y_n''(y)}{Y_n(y)} = \lambda_n ;$$

- se $\lambda_n > 0$

$$X_n(x) = A_n e^{\sqrt{\lambda_n}\, x} + B_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\, x} \quad e \quad Y_n(y) = \tilde{A}_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\, y) + \tilde{B}_n \sin(\sqrt{\lambda_n}\, y),$$

se $\lambda_n < 0$

$$X_n(x) = A_n \cos(\sqrt{|\lambda_n|}\, x) + B_n \sin(\sqrt{|\lambda_n|}\, x) \quad e \quad Y_n(y) = \tilde{A}_n e^{\sqrt{|\lambda_n|}\, y} + \tilde{B}_n e^{-\sqrt{|\lambda_n|}\, y};$$

poiché $u_1(0,y) = u_1(L,y) = 0 \quad \forall\, y \in [0,2]$

$$\Rightarrow u_1(x,y) = \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\left[\tilde{A}_n e^{\frac{n\pi}{L} y} + \tilde{B}_n e^{-\frac{n\pi}{L} y}\right]$$

inoltre

$$u_1(x,0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \quad \forall\, x \in [0,L] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (\tilde{A}_3 + \tilde{B}_3) = 1 \\ \tilde{A}_n + \tilde{B}_n = 0 \quad \forall\, n \neq 3 \end{cases}$$

e $u_1(x,2) = 0 \quad \forall\, x \in [0,L] \quad \Rightarrow \quad \tilde{A}_n e^{\frac{2n\pi}{L}} + \tilde{B}_n e^{-\frac{2n\pi}{L}} = 0 \quad \forall\, n \geq 1,$

da cui $\tilde{A}_n = \tilde{B}_n = 0 \quad \forall\, n \neq 3, \qquad \tilde{B}_3 = (1 - \tilde{A}_3) = 1 - \dfrac{e^{-\frac{6\pi}{L}}}{e^{\frac{6\pi}{L}} - e^{-\frac{6\pi}{L}}}$

e quindi

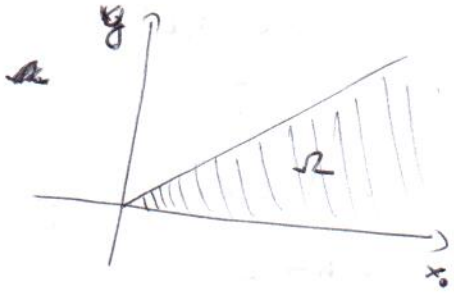
$$u_1(x,y) = -\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\frac{\sinh\left(\frac{3\pi}{L}(y-2)\right)}{\sinh\left(\frac{6\pi}{L}\right)}$$

· con un procedimento analogo si trova

$$u_2(x,y) = 2\,\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}L\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

e infine $\quad u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$

(2)



Cerchiamo una soluz. nella forma

$u(x,y) = a(x^2-y^2) + bxy + cx + dy + e = 0$

con a, b, c, d, e costanti reali.

$u(x,0) = x^2 \iff ax^2 + cx + e = 0 \quad \forall\, x \geq 0 \implies a = 1,\ c = e = 0,$

quindi

$u(x,y) = (x^2-y^2) + bxy + dy;$

inoltre, poiché $u(x,x) = x^2 \iff bx^2 + dx = x^2 \quad \forall\, x \geq 0$

$\implies b = 1,\ d = 0,$

per cui

$$u(x,y) = (x^2-y^2) + xy$$