1 Catene di oscillatori

Catena di oscillatori con moto trasversale. N punti materiali di ugual massa, vincolati a muoversi su rette parallele e equidistanziate nel piano. In un opportuno sistema di riferimento cartesiano, le coordinate (x_j, y_j) del j-esimo punto materiale sono vincolate ad avere ascissa costante $x_j = ja$, dove $a > 0$ è la distanza tra una retta e la successiva. Ciascun punto materiale interagisce con i punti adiacenti mediante forze elastiche di uguale costante $K > 0$. Ciascun punto è inoltre richiamato verso la propria posizione di equilibrio da una forza elastica di costante $K_0 > 0$ (potenziale ad un sito o ad una particella) ed è eventualmente soggetto alla forza peso.

1.1 Esercizio

Si consideri una catena di $N+2$ oscillatori armonici con moto trasversale in cui in primo oscillatore e l'ultimo sono fissati nelle rispettive posizioni di equilibrio $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $(x_{N+1}, y_{N+1}) = ((N+1)a, 0)$.

1. Scrivere la lagrangiana nel caso in cui $K_0 = 0$ (si trascuri la forza peso). Derivare le equazioni di Eulero-Lagrange (equazioni del moto). Determinare il funzionale energia e dimostrare che è un integrale primo del moto.

2. Scrivere le equazioni del moto nella forma $\ddot{y} = Ay$.
   Determinare la soluzione del problema per $N = 2$.

3. Scrivere la lagrangiana nel caso in cui $K_0 > 0$ e ciascun punto sia soggetto alla forza peso. Derivare le equazioni di Eulero-Lagrange. Determinare il funzionale energia e verificare se è un integrale primo del moto.

1.2 Esercizio

Si consideri una catena di N oscillatori armonici con moto trasversale (il primo e l'ultimo oscillatore NON sono vincolati a restare nella posizione di equilibrio).

1. Scrivere la lagrangiana nel caso in cui $K_0 = 0$ (si trascuri la forza peso). Derivare le equazioni di Eulero-Lagrange (equazioni del moto). Determinare il funzionale energia e dimostrare che è un integrale primo del moto.

2. Sia P il funzionale impulso $P(\dot{y}) = \sum_{j=1}^{N} m\dot{y}_j$. Verificare se è un integrale primo del moto.

3. Scrivere le equazioni del moto nella forma $\ddot{y} = Ay$.
   Determinare la soluzione del problema per $N = 2$.

4. Scrivere la lagrangiana nel caso in cui $K_0 > 0$ e ciascun punto sia soggetto alla forza peso. Derivare le equazioni di Eulero-Lagrange. Determinare il funzionale energia e verificare se è un integrale primo del moto. Verificare se l'impulso è un integrale primo del moto.

Catena di oscillatori. N punti materiali di ugual massa, vincolati a muoversi nel piano. In un opportuno sistema di riferimento cartesiano, le coordinate del j-esimo punto sono $(x_j, y_j) = (aj + u_j, y_j)$ (la posizione di equilibrio è $(aj, 0)$). Ciascun punto materiale interagisce con i punti adiacenti mediante forze elastiche di uguale costante $K > 0$. Ciascun punto è inoltre richiamato verso la propria posizione di equilibrio da una forza elastica di costante $K_0 > 0$ (potenziale ad un sito o ad una particella) ed è eventualmente soggetto alla forza peso.

1.3 Esercizio

Si consideri una catena di $N + 2$ oscillatori armonici nel piano in cui in primo punto materiale P_0 e l'ultimo P_{N+1} sono fissati nelle rispettive posizioni di equilibrio $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $(x_{N+1}, y_{N+1}) = ((N + 1)a, 0)$.

1. Scrivere la lagrangiana nel caso in cui $K_0 = 0$ (si trascuri la forza peso). Derivare le equazioni di Eulero-Lagrange (equazioni del moto). Determinare il funzionale energia e dimostrare che è un integrale primo del moto.

2. Scrivere la lagrangiana nel caso in cui $K_0 > 0$ e ciascun punto sia soggetto alla forza peso. Derivare le equazioni di Eulero-Lagrange. Determinare il funzionale energia e verificare se è un integrale primo del moto.