ISTITUZIONI MATEMATICA II - CANALE A-L - 13/7/2016

Nome e matricola :

Esercizio 1. (Punti 6) - Si consideri il seguente sistema lineare :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 2z - 2 = 0 \\ y + z - x = 3 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

i) stabilire se ammette soluzioni e quante ne ammette (motivando la risposta)

ii) trovare tutte le soluzioni (utilizzando la teoria delle matrici).

SOLUZIONE:

i) La matrice dei coefficienti é una matrice 4×3 che ha rango 3 , la matrice completa 4×4 ha determinante uguale a zero come si vede facilmente osservando che la seconda riga si ottiene moltiplicando la quarta riga per 2 e quindi ha rango 3. Questo vuole anche dire che il sistema é compatibile e una fra la seconda e la quarta equazione puó essere eliminata. Quindi il sitema si riduce a un sistema di 3 equazioni e 3 incognite che, per il Teorema di Cramer, ammette un'unica soluzione.

ii) L'unica soluzione si ottiene mediante la regola di Cramer ed é data da : $x = -\frac{1}{2} \quad , y = 1 \quad , z = \frac{3}{2}$

Esercizio 2. (Punti 6) - Sia F il campo vettoriale definito da :

$$F(x,y) = \left([\frac{1}{x+1} + \log(x+1)]e^{x+y} \quad , \quad \log(x+1)e^{x+y} \right)$$

i) determinare l'insieme di definizione di F , l'insieme in cui F é irrotazionale e l'insieme in cui F é conservativo

ii) trovare le eventuali primitive di F .

SOLUZIONE:

i) L'insieme di definizione D di F coincide con quello in cui F é irrotazionale e quello in cui F é conservativo. Infatti $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > -1\}$ che é semplicemente connesso.

ii) Tutte le primitive di F sono: $\qquad U(x,y) = \log(x+1)e^{x+y} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Esercizio 3. (Punti 6) - Per la seguente funzione di due variabili :

$$f(x, y) = e^x(x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2$$

i) trovare i punti critici in tutto l'insieme di definizione
ii) stabilire se i punti critici sono estremi relativi o punti di sella

SOLUZIONE:

i) I punti critici sono: $P_1 = (0, \frac{3}{2})$ e $P_2 = (1, 1)$.

ii) Il punto P_1 é punto di minimo relativo, il punto P_2 é punto di sella.

Esercizio 4. (Punti 3 o punti -1) - Sia A la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I suoi autovalori λ_1 e λ_2 sono :

(A) $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$; (B) $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$

(C) $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$; (D) $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$.

Risposta : $\boxed{\textbf{C}}$

Esercizio 5. (Punti 2 o -1) - Sia D il dominio del piano,situato nel primo quadrante, limitato dalla curva di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ e dalle rette di equazione $x = 0$ e $y = 0$. Per ogni funzione continua f vale la formula :

(A) $\int\int_D f(x,y) \; dx\,dy = \int_0^2 [\int_0^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} f(x,y)dy]dx$

(B) $\int\int_D f(x,y) \; dx\,dy = \int_0^1 [\int_0^{\sqrt{4-4x^2}} f(x,y)dx]dy$

(C) $\int\int_D f(x,y) \; dx\,dy = \int_0^1 [\int_0^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} f(x,y)dy]dx$

(D) $\int\int_D f(x,y) \; dx\,dy = \int_0^2 [\int_0^{\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}} f(x,y)dx]dy$

Risposta : $\boxed{\textbf{D}}$

Esercizio 6. (Punti 2 o -1) - L'insieme di definizione D della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y^2+1}}{e^x - 1}$$

é :

(A) $D = \{(x,y) : x \neq 1 \text{ e } y \neq -1\}$

(B) $D = \{(x,y) : x \neq 1 \text{ e } y \geq -1\}$

(C) $D = \{(x,y) : x \neq 0\}$

(D) $D = \{(x,y) : x \neq 0 \text{ e } y \geq -1 \text{ o } y \leq -1\}$

Risposta : $\boxed{\textbf{C}}$

Esercizio 7. (Punti 2 o punti -1) - Sia γ la curva piana che rappresenta il grafico della funzione : $f(x) = x \sin x$, $x \in [0, \pi]$. Il vettore tangente alla curva in $x \in (0, \pi)$ é :

(A) $(1\ ,\ 1 + \cos x)$; (B) $(1\ ,\ \sin x + x \cos x)$

(C) $(\sin x\ ,\ x \cos x)$; (D) $(1\ ,\ \cos x)$

Risposta : $\boxed{\textbf{B}}$

Esercizio 8. (Punti 3 o -1) - Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 3 \quad \text{e } y \geq 0\}$
L'integrale doppio :

$$\int\int_D \sqrt{3-x^2-y^2} \ \ dx\,dy$$

é uguale a :

(A) $3\,\pi$

(B) $\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$

(C) $\pi\sqrt{27}$

(D) $\pi\sqrt{3}$

Risposta : **D**

Esercizio 9. (Punti 2 o -1) - Sia D un dominio regolare del piano. L'integrale doppio :

$$\int\int_D 2\ xy + e^x \ \ dx\,dy$$

utilizzando le formule di Gauss-Green diventa :

(A) $\int_{+\partial D} 2\ x\ dy$

(B) $-\int_{+\partial D}(xy^2 + e^x y)\ dy$

(C) $\int_{+\partial D}(x^2 y + e^x)\ dy$

(D) $-\int_{+\partial D}(2\ y + e^x)\ dx$

Risposta : **C**