ISTITUZIONI MATEMATICA II - CANALE A-L - 16/6/2016

Nome e matricola :

Esercizio 1. (Punti 6) - Si consideri il seguente sistema lineare :

$$\begin{cases} 2x - y = 2 - 3z \\ y + z + 1 \ = 0 \\ z + 2 \ = x \end{cases}$$

i) stabilire se ammette soluzioni e quante ne ammette (motivando la risposta)

ii) trovare tutte le soluzioni (utilizzando la teoria delle matrici).

SOLUZIONE :

i) Poiché il sistema ha lo stesso numero di equazioni e incognite , basta guardare il determinante della matrice A dei coefficienti. Poiché $det(A) = 6 \neq 0$, per il Teorema di Cramer il sistema ammette un'unica soluzione.

ii) Utilizzando la regola di Cramer si ottiene che l'unica soluzione é : $(x, y, z) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Esercizio 2. (Punti 6) - Sia F il campo vettoriale definito da :

$$F(x,y) = \left(1 + \frac{y^3}{x^2} \quad , \quad y - \frac{3y^2}{x}\right)$$

i) determinare l'insieme di definizione di F e l'insieme in cui F é irrotazionale

ii) trovare le eventuali primitive di F.

SOLUZIONE :

i) L'insieme di definizione del campo vettoriale F é $D = \{(x,y) : x \neq 0\}$. Calcolando le derivate si verifica facilmente che D é' anche l'insieme in cui il campo F é irrotazionale. Si puó aggiungere che, poiché D é l'unione di due semipiani, ciascuno dei quali é un insieme connesso e semplicemente connesso, allora il campo F é anche conservativo in D.

ii) Le primitive di F sono le funzioni : $U(x,y) = x - \frac{y^3}{x} + \frac{y^2}{2} + K \quad , K \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. (Punti 6)

i) Calcolare :

$$\int\int_D xe^y \quad dx\, dy$$

dove D é il dominio del primo quadrante delimitato dalle rette di equazione $y = x$, $y = 2x$, e $x = 1$

ii) Utilizzando le formule di Gauss-Green calcolare l'area del dominio D del punto i).

SOLUZIONE :

i) Il dominio D é un insieme normale rispetto alla variabile x (o y- semplice). Infatti : $D = \{(x, y) \ : x \in [0, 1], \ x \ \leq \ y \ \leq \ 2x\}$.
Pertanto, applicando la formula di riduzione degli integrali doppi su domini normali si ottiene :

$$\int\int_D xe^y \quad dx\, dy \quad = \int_0^1 [\int_x^{2x} \quad xe^y dy]dx = \frac{e^2 - 3}{4}$$

ii)Utilizzando la formula di Gauss-Green per il calcolo dell'area di D si ha :

$$Area(D) = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} \ x \ dy - y \ dx \ = \ \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4. (Punti 2 o punti -1) - Sia A la matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La sua matrice inversa A^{-1} é :

(A) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Risposta : $\boxed{\textbf{B}}$

Esercizio 5. (Punti 3 o punti -1) - Per la seguente funzione di due variabili :

$$f(x,y) = xe^y - ye^x$$

il punto $P = (1,1)$ é :

(A) punto critico e punto di sella

(B) punto critico e punto di minimo locale

(C) non é un punto critico

(D) punto critico ma non si puó stabilire se é di minimo locale , di massimo locale o punto di sella.

Risposta : $\boxed{\textbf{A}}$

Esercizio 6. (Punti 2 o -1) - L'insieme di definizione D della funzione

$$f(x, y) = \log(x + y) + \sin x$$

é :

(A) $D = \{(x, y) : y \geq -x \;\text{ e }\; x \in [0, 2\pi]\}$

(B) $D = \{(x, y) : y > -x\}$

(C) $D = \{(x, y) : x \geq -y \;\text{ e }\; x \in [0, 2\pi]\}$

(D) $D = \{(x, y) : x > -y \;\text{ e }\; x \in [-1, 1]\}$

Risposta : $\boxed{\textbf{B}}$

Esercizio 7. (Punti 3 o punti -1) - Sia γ la curva in $\mathbb{R}^3$ definita da :

$$\gamma(t) = (2t \;\;,\;\; t^2 \;\;,\;\; t) \;\;,\;\; t \in [0, 1].$$

L'integrale curvilineo di prima specie : $\int_\gamma \sqrt{5 + x^2} \;\; ds$ é :

(A) $-\frac{1}{3}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{19}{3}$; (D) $\sqrt{5}$

Risposta : $\boxed{\textbf{C}}$

Esercizio 8. (Punti 2 o -1) - Sia D la parte del cerchio di centro l'origine e raggio 1 delimitata dalla retta di equazione $y = x$ e dall'asse delle y . L'integrale doppio :

$$\int\int_D e^{x^2+y^2} \quad dx\, dy$$

dopo il cambio di variabili in coordinate polari diventa :

(A) $\int_0^{2\pi}[\int_0^1 e^{\rho^2}\rho\ d\rho]d\theta$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\int_0^1 e^{\rho^2}\rho\ d\rho]d\theta$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1 e^{\rho^2}\ d\rho]d\theta$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1 e^{\rho^2}\rho\ d\rho]d\theta$

Risposta : **D**

Esercizio 9. (Punti 2 o -1) - Sia F il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ definito da :

$$F(x, y, z) = \big(x + y \quad , \quad z - y \quad , \quad x^3y\big)$$

il rotore di F é :

(A) $(1\ ,\ -1\ ,\ 0)$; (B) 0

(C) $(x^3 - 1\ ,\ -3x^2y\ ,\ -1)$; (D) $= (3x^2y\ ,\ 1 - x^3\ ,\ 1)$

Risposta : **C**