A

II ESONERO DI ISTITUZIONI MATEMATICA II - 8/6/2016

Nome e matricola :

Esercizio 1. (Punti 10) - Sia F il campo vettoriale definito da :

$$F(x,y) = \left(\log y + \cos x \quad , \quad \frac{x}{y} \right)$$

i) determinare l'insieme di definizione di F , l'insieme in cui F é irrotazionale e l'insieme in cui F é conservativo.
ii) trovare una primitiva di F
iii) calcolare $\int_\gamma F$ dove γ é la curva espressa dall' equazione in coordinate polari : $\rho(\theta) = \theta^3 + 1$, $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

SOLUZIONE :

i) L'insieme di definizione del campo vettoriale F é $D = \{(x,y) : y > 0\}$ e coincide con l'insieme in cui F é irrotazionale. Inoltre poiché D é semplicemente connesso il campo vettoriale F é conservativo in D.

ii) Le primitive di F sono le funzioni : $U(x,y) = x \log y + \sin x + K$, $K \in \mathbb{R}$

iii) Poiché il campo vettoriale F é conservativo l'integrale é uguale alla differenza $(U(Q) - U(P))$ dove P e Q sono gli estremi della curva. Le coordinate cartesiane di tali estremi si calcolano utilizzando le formule di passaggio dalle coordinate polari a quelle cartesiane .

Esercizio 2. (Punti 3 o punti -1) - Sia γ la curva in $\mathbb{R}^3$ definita da :

$$\gamma(t) = (t \ , \ \frac{2\sqrt{2}}{3}\, t\sqrt{t} \ , \ \frac{1}{2}t^2) \ , \ t \in [0,2].$$

La sua lunghezza $l(\gamma)$ é :

(A) $l(\gamma) = 2\sqrt{2}$; (B) $l(\gamma) = 6$

(C) $l(\gamma) = 4$; (D) $l(\gamma) = -1.$

Risposta : $\boxed{\textbf{C}}$

Esercizio 3. (Punti 2 o punti -1) - Sia γ la curva piana che rappresenta il grafico della funzione : $f(x) = x^3 + e^{3x}$, $x \in [0,1]$. Il vettore tangente alla curva in $x \in (0,1)$ é :

(A) $(1 \ , \ x^3 + e^{3x})$; (B) $(3x^2 \ , \ 3e^{3x})$

(C) $(x^3 \ , \ e^{3x})$; (D) $(1 \ , \ 3x^2 + 3e^{3x})$

Risposta : $\boxed{\textbf{D}}$

Esercizio 4. (Punti 10) - Si consideri la funzione : $f(x,y) = x^2 + y$.
i) Calcolare :

$$\int\int_D f(x,y) \ \ dx\, dy$$

dove D é la corona circolare con centro nell'origine e raggi 1 e 2 .
ii) Calcolare :

$$\int\int_C f(x,y) \ \ dx\, dy$$

dove $C = \{(x,y) \ : \ \ x^2 + y^2 \geq 1\}$
iii) Utilizzando le formule di Gauss-Green calcolare :

$$\int\int_\Omega f(x,y) \ \ dx\, dy$$

dove Ω é il quadrato $[0,1] \times [0,1]$

SOLUZIONE :

i) L'integrale si calcola facilmente in coordinate polari :

$$\int\int_D f(x,y) \ \ dx\, dy \ = \int_0^{2\pi} [\int_1^2 (\rho^2 \cos^2\theta + \rho \sin\theta)\rho \ d\rho] \ d\theta = \frac{15}{4}\pi.$$

ii)Si tratta di un integrale generalizzato in un dominio non limitato (esterno di un cerchio):

$$\int\int_C f(x,y) \ \ dx\, dy \ = \ lim_{R\to\infty} \int\int_{C_R} f(x,y) \ \ dx\, dy \ = \ +\infty$$

dove $C_R = \{(x,y) \ : \ \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq R\}$
L'integrale sulla corona circolare C_R si calcola in coordinate polari come quello al punto i).

iii) Utilizzando una delle formule di Gauss Green si ha :

$$\int\int_\Omega x^2 + y \ \ dx\, dy \ = \int\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y + \frac{y^2}{2}) \ \ dx\, dy = \ - \ \int_{+\partial D} (x^2 y + \frac{y^2}{2}) dx \ = \ \frac{5}{6}$$

Poiché Ω é un quadrato la sua frontiera é l'unione di quattro segmenti di cui si scrivono facilmente le rappresentazioni parametriche.

Esercizio 5. (Punti 3 o -1) - Sia D il dominio del piano limitato dalla curva di equazione $y = e^x$, $x \in [0,1]$ e dalle rette di equazione $x = 0$ e $y = e$. Per ogni funzione continua f vale la formula :

(A) $\int\int_D \; f(x,y) \;\; dx\, dy \;\; = \int_0^1 [\int_{e^x}^e f(x,y) dx] dy$

(B) $\int\int_D \; f(x,y) \;\; dx\, dy \;\; = \int_0^1 [\int_{e^x}^e f(x,y) dy] dx$

(C) $\int\int_D \; f(x,y) \;\; dx\, dy \;\; = \int_{e^x}^e [\int_0^1 f(x,y) dx] dy$

(D) $\int\int_D \; f(x,y) \;\; dx\, dy \;\; = \int_0^1 [\int_0^e f(x,y) dy] dx$

Risposta : B

Esercizio 6. (Punti 3 o -1) - L'area della superficie che rappresenta il grafico della funzione $f(x,y) = x - 2y - +1$ sul rettangolo $D = [1,2] \times [0,2]$ é :

(A) $2\sqrt{6}$; (B) $\sqrt{5}$; (C) $2\sqrt{5}$; (D) $\sqrt{6}$

Risposta : A

Esercizio 7. (Punti 2 o -1) - Sia F il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ definito da :

$$F(x,y) = \big(x^2 \quad , \quad 2x + z \quad , \quad yx\big)$$

la divergenza di F é :

(A) $divF(x,y,z) = (2x \; , \; 3 \; , \; x+y)$; (B) $divF(x,y,z) = 2x$

(C) $divF(x,y,z) = (2x \; , \; 2 \; , \; x+y)$; (D) $divF(x,y,z) = (2x \; , \; 0 \; , \; 0)$

Risposta : B