A

I ESONERO DI ISTITUZIONI MATEMATICA II - 20/4/2016

SONO RIPORTATE SOLO LE SOLUZIONI E NON LO SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1. (Punti 10) - **Si consideri il seguente sistema lineare :**

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 + 1 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 & = 0 \\ x_1 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

i)stabilire se ammette soluzioni motivando la risposta
ii) trovare tutte le soluzioni
iii) detta A la matrice dei coefficienti del sistema e L_A l'applicazione lineare corrispondente, stabilire se L_A é iniettiva, suriettiva o biettiva (o equivalentemente determinarne il nucleo e l'immagine).

SOLUZIONE :

i) La matrice dei coefficienti e quella completa hanno lo stesso rango che é 3 , pertanto per il Teorema di Rouché Capelli il sistema ammette soluzioni

ii) le soluzioni sono : $(-(x_4+2), 1, x_4+2, x_4)$ **al variare di** $x_4 \in \mathbb{R}$

iii) L'applicazione lineare L_A non é iniettiva per ii) ed é suriettiva perché A ha rango massimo.

Esercizio 2. (Punti 3 o punti -1) **- Sia A la matrice :**

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

I suoi autovalori λ_1 e λ_2 sono :

(A) $\lambda_1 = 1$ **e** $\lambda_2 = 2$ **;** **(B)** $\lambda_1 = 3$ **e** $\lambda_2 = -2\sqrt{6}$

(C) $\lambda_1 = -1$ **e** $\lambda_2 = 4$ **;** **(D)** $\lambda_1 = -1$ **e** $\lambda_2 = 0$**.**

Risposta : $\boxed{\textbf{C}}$

Esercizio 3. (Punti 2 o punti -1) **- Sia A la matrice :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

e $v = (v_1, v_2, v_3)$ un generico vettore in $\mathbb{R}^3$.

Il punto Av é :

(A) $(v_1, 0, -3v_3)$ **;** **(B)** $(v_1, 2v_2, -3v_3)$

(C) $(v_2 + 2v_1, v_2 - 3v_3, -3v_3)$ **;** **(D)** $(v_1 + 2v_2, 2v_2, v_2 - 3v_3)$

Risposta : $\boxed{\textbf{D}}$

Esercizio 4. (Punti 10) - **Per la seguente funzione di due variabili :**

$$f(x, y) = (x^3 - 8)y^3 + x^3 + 2$$

i) trovare i punti critici in tutto l'insieme di definizione
ii) stabilire se i punti critici sono estremi relativi o punti di sella
iii) considerato l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [0, 2]\ ,\ y \geq 0\}$ **stabilire se la funzione é limitata inferiormente e/o superiormente in** D **e trovare gli eventuali punti di minimo o massimo assoluti.**

SOLUZIONE :

i) I punti critici sono $P_1 = (0, 0)$ **e** $P_2 = (2, -1)$ **.**

ii) Il punto P_2 **é un punto di sella (il determinante della corrispondente matrice hessiana é negativo) , anche il punto** P_1 **é un punto di sella ma si vede studiando i valori della funzione in punti vicini a** P_1 **perché il determinante della corrispondente matrice hessiana é zero.**

iii) Nell'insieme D **la funzione non é limitata inferiormente e quindi non ha minimo ; é invece limitata superiormente e il valore massimo é** 10 **assunto nei punti di massimo assoluto** $Q = (2, y), y \geq 0$ **.**

Esercizio 5. (Punti 3 o -1) - **Il piano tangente al grafico della funzione** $f(x,y) = 2\sin(xy) + e^{x-1}$ **nel punto** $P = (1, \frac{\pi}{2})$ **ha equazione :**

(A) $z = 2x + y + 2$; **(B)** $z = x + 2$

(C) $z = x + y + e$; **(D)** $z = x + e$

Risposta : B

Esercizio 6. (Punti 3 o -1) - **L'insieme di definizione** D **della funzione** $f(x,y) = \frac{\log(3-x^2-y^2)}{\sqrt{2x}}$ **é :**

(A) $D = \{(x,y) : |(x,y)| \leq \sqrt{3}$ **e** $x \geq 0\}$ **ed é un insieme chiuso e limitato.**

(B) $D = \{(x,y) : |(x,y)| < \sqrt{3}$ **e** $x > 0\}$ **ed é un insieme aperto e limitato.**

(C) $D = \{(x,y) : |(x,y)| < \sqrt{3}$ **e** $x \geq 0\}$ **ed é un insieme limitato.**

(D) $D = \{(x,y) : |(x,y)| < \sqrt{3}$ **e** $x > 0\}$ **ed é un insieme chiuso e limitato.**

Risposta : B

Esercizio 7. (Punti 2 o -1) - **Sia** $f(x,y) = \log(x^2 + y^2 + 1) + \sin x$. **La derivata direzionale di** f **nel punto** $(0,1)$ **e nella direzione del versore** $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ **é :**

(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; **(B)** 2 ; **(C)** $\sqrt{3} - 1$; **(D)** $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$.

Risposta : A