ISTITUZIONI MATEMATICA II - CANALE A-L - 19/7/2017

Nome e matricola :

Esercizio 1. (Punti 6) - Si consideri il seguente sistema lineare :

$$\begin{cases} x + z &= 4 - y \\ 2 - z + x &= 0 \\ y - z &= 3 \end{cases}$$

i) stabilire se ammette soluzioni e quante ne ammette (motivando la risposta)

ii) trovare tutte le soluzioni (utilizzando la teoria delle matrici).

iii) stabilire se l'applicazione lineare associata alla matrice dei coefficienti é iniettiva, suriettiva o biettiva.

Soluzione : i) Avendo il sistema lo stesso numero di equazioni e incognite e essendo il rango della matrice dei coefficienti massimo, per il teorema di Cramer il sistema ammette un'unica soluzione.
ii) La soluzione é : (- 1 , 4 , 1)
iii) Poiché la matrice deii coefficienti ha determinante diverso da zero, l'applicazione lineare corrispondente é biettiva.

Esercizio 2. (Punti 6) - Sia F il campo vettoriale definito da :

$$F(x,y,) = \big(y^3 + x \quad , \quad -\sqrt{x}\big)$$

i) determinare l'insieme di definizione di F, l'insieme in cui F é irrotazionale e quello in cui F é conservativo

ii) calcolare $\int_\gamma F$, dove γ é la curva che rappresenta la parabola di equazione $x = y^2$ che congiunge i punti $(0,0)$ e $(1,1)$.

Soluzione : i) L'insieme di definizione é $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\big\}$. Il campo non é irrotazionale in alcun aperto del piano e quindi neppure conservativo.
ii) L'integrale vale $\frac{2}{5}$

Esercizio 3. (Punti 6)

i) Calcolare :

$$\int\int_D e^{y+1}\, dx\, dy$$

dove D é il dominio del piano delimitato dalle rette di equazioni : $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = x + 1$

ii) Calcolare :

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{y+1}\, dx\, dy$$

Soluzione : i) Utilizzando le formule di riduzione per domini normali si ha : $\int\int_D e^{y+1}\, dx\, dy \ = \ \int_0^1 [\int_0^{x+1} e^{y+1}\ dy]\ dx \ = e^3 - e - e^2$

ii) L'integrale su tutto il piano vale $+\infty$

Esercizio 4. (Punti 3 o punti -1) - Sia A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango di A è :

(A) 3 ; (B) 4 ; (C) 2 ; (D) *massimo.*

Risposta : (C)

Esercizio 5. (Punti 3 o punti -1) - Data la seguente funzione di due variabili :

$$f(x, y) = y^3 - 5 + x^3(y^3 - 8)$$

si ha :

(A) il punto $(0, 0)$ non é un punto critico

(B) esiste un unico punto critico

(C) il punto $(-1, 2)$ é un punto critico e non é un punto di massimo relativo

(D)il punto $(-1, 2)$ é un punto critico ed é un punto di minimo relativo

Risposta : (C)

Esercizio 6. (Punti 2 o -1) - Sia $f(x, y) = x^2 + y - 3$. Il piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1)$ ha equazione :

(A) $z + 4 - 2x - y = 0$; (B) $2x + y = 1$

(C) $(2x, -1)$; (D) $z = 2x + y - 1$.

Risposta : (A)

Esercizio 7. (Punti 3 o punti -1) - Sia γ la curva in $\mathbb{R}^2$ definita da :

$$\gamma(t) = (cos^3 t \quad , \quad sin^3 t) \quad , \quad t \ \in [0, 3\pi].$$

La lunghezza di γ é :

(A) 9 ; (B) 6 ; (C) 0 ; (D) 6π.

Risposta : (A)

Esercizio 8. (Punti 2 o -1) - L'insieme del piano :

$$D = \{(x, y) : x \geq y \ \text{ e } \ x^2 + y^2 < 1\}$$

(A) é un insieme chiuso e limitato (B) é un insieme non limitato

(C) é un insieme aperto (D) non é un insieme aperto

Risposta : (D)

Esercizio 9. (Punti 2 o -1) - Sia F il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ definito da :

$$F(x, y, z) = \big(x + y \quad , \quad z - y \quad , \quad x^3 y\big)$$

il rotore di di F é :

(A) $(3x^2y \ , \ 1 - x^3 \ , \ 1)$; (B) $(x^3 - 1 \ , \ -3x^2y \ , \ -1)$

(C) $(0 \ , \ 0 \ , \ x^3)$; (D) 0

Risposta : (B)