ISTITUZIONI MATEMATICA II - CANALE A-L - 22/6/2017

Nome e matricola :

Esercizio 1. (Punti 6) - Si consideri il seguente sistema lineare :

$$\begin{cases} 2x - 2z = -4y \\ 3x + z - 1 = 0 \\ 2 - 2z = 6x \\ y + z = x + 2 \end{cases}$$

i) stabilire se ammette soluzioni e quante ne ammette (motivando la risposta)

ii) trovare tutte le soluzioni (utilizzando la teoria delle matrici).

SOLUZIONE:

i) La matrice dei coefficienti é una matrice 4×3 che ha rango 3 , la matrice completa 4×4 ha determinante uguale a zero come si vede facilmente osservando che la terza riga si ottiene moltiplicando la seconda riga per -2 e quindi ha rango 3. Questo vuole anche dire che il sistema é compatibile e una fra la seconda e la terza equazione puó essere eliminata. Quindi il sitema si riduce a un sistema di 3 equazioni e 3 incognite che, per il Teorema di Cramer, ammette un'unica soluzione.

ii) L'unica soluzione si ottiene mediante la regola di Cramer ed é data da : $x = -\frac{1}{12}$ $\quad , y = \frac{2}{3}$ $\quad , z = \frac{5}{4}$

Esercizio 2. (Punti 6) - Sia F il campo vettoriale definito da :

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{x+1}\sin(x+y) + \log(x+1)\cos(x+y) \quad , \quad \log(x+1)\cos(x+y)\right)$$

i) determinare l'insieme di definizione di F , l'insieme in cui F é irrotazionale e l'insieme in cui F é conservativo

ii) trovare le eventuali primitive di F .

SOLUZIONE:

i) L'insieme di definizione D di F coincide con quello in cui F é irrotazionale e quello in cui F é conservativo. Infatti $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > -1\}$ che é semplicemente connesso.

ii) Tutte le primitive di F sono: $U(x,y) = \log(x+1)\sin(x+y) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. (Punti 6) - Per la seguente funzione di due variabili :

$$f(x,y) = (2x-1)^2 + e^y(2x-1)(y-1)$$

i) trovare i punti critici in tutto l'insieme di definizione
ii) stabilire se i punti critici sono estremi relativi o punti di sella

SOLUZIONE:

i) I punti critici sono: $P_1 = (\frac{3}{4}, 0)$ e $P_2 = (\frac{1}{2}, 1)$.

ii) Il punto P_1 é punto di minimo relativo, il punto P_2 é punto di sella.

Esercizio 4. (Punti 3 o punti -1) - Sia A la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La sua matrice inversa é :

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (D) non ammette inversa.

RISPOSTA : (B)

Esercizio 5. (Punti 2 o -1) - Sia D il dominio del piano, situato nel primo quadrante, limitato dalla curva di equazione $e^x - y + 1 = 0$ e dalle rette di equazione $x = 0$ e $y = e + 1$. Allora vale la formula :

(A) $\int\int_D \; x^2 y \;\; dx\, dy \;\; = \int_0^1 [\int_1^{e+1} x^2 y\, dy]\, dx$

(B) $\int\int_D \; x^2 y \;\; dx\, dy \;\; = \int_0^1 [\int_0^{e^x+1} x^2 y\, dx]\, dy$

(C) $\int\int_D \; x^2 y \;\; dx\, dy \;\; = \int_0^1 [\int_{e^x+1}^{e+1} x^2 y\, dy]\, dx$

(D) $\int\int_D \; x^2 y \;\; dx\, dy \;\; = \int_0^{e^x+1} [\int_0^1 x^2 y\, dx]\, dy$

RISPOSTA : (C)

Esercizio 6. (Punti 2 o -1) - L'insieme di definizione D della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{y}$$

é :

(A) $D = \{(x,y) : y \neq 0 \ \text{ e } -1 \leq x \leq 1\}$

(B) $D = \{(x,y) : y \neq 0 \ \text{ e } x \geq 1 \text{ o } x \leq -1\}$

(C) $D = \{(x,y) : y > 0 \ \text{ e } x \geq 1 \text{ o } x \leq -1\}$

(D) $D = \{(x,y) : y > 0 \ \text{ e } x > 1 \text{ o } x < -1\}$

RISPOSTA : (B)

Esercizio 7. (Punti 2 o punti -1) - Sia γ la curva piana che rappresenta il grafico della funzione : $f(x) = x\log(x+1)$, $x \in \ [0,2]$. Il vettore tangente alla curva in $x = 1$ é :

(A) $\log 2 + \frac{1}{2}$; (B) $(0 \ , \frac{1}{2})$

(C) $(1 \ , \ \frac{1}{2})$; (D) $(1 \ , \ \frac{2\log 2+1}{2})$

RISPOSTA : (D)

Esercizio 8. (Punti 3 o -1) - Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \ \ \text{e} \ x \leq 0\}$.
L'integrale doppio :

$$\int\int_D x^2 + y^2 + 2 \ \ dx\, dy$$

é uguale a :

(A) $\frac{7}{3}\,\pi$

(B) $\frac{14}{3}\,\pi$

(C) $\frac{5}{4}\,\pi$

(D) $\frac{5}{4}$

RISPOSTA : (C)

Esercizio 9. (Punti 3 o -1) - Sia F il campo vettoriale definito da :

$$F(x,y,z) = \big(2 \ \ , \ \ x^2+y^2, \ \ z\big)$$

e γ la curva : $\gamma(t) = (\cos t \ , \ \sin t \ , \ t) \quad t \in [0, 4\pi]$. Si ha :

(A) $\int_\gamma F \ = 8\pi^2$

(B) $\int_\gamma F \ = 2 + 8\pi$

(C) $\int_\gamma F \ = 12\pi + 8\pi^2$

(D) $\int_\gamma F \ = 4\pi$

RISPOSTA : (A)