II ESONERO DI ISTITUZIONI MATEMATICA II - 14/6/2017

Nome e matricola :

Esercizio 1. (Punti 10) - Sia F il campo vettoriale definito da :

$$F(x,y) = \left(\log(x+y) + \frac{x}{x+y} \quad , \quad \frac{x}{x+y}\right)$$

i) determinare l'insieme di definizione di F , l'insieme in cui F é irrotazionale e l'insieme in cui F é conservativo.
ii) trovare una primitiva di F
iii) calcolare $\int_\gamma F$ dove γ é la circonferenza di centro $P = (2,2)$ e raggio $R = 1$.

SOLUZIONE :
i)L'insieme di definizione é $D = \{(x,y) : y > -x\}$ e in esso il campo vettoriale é chiuso (o irrotazionale). Poiché D é un insieme semplicemente connesso allora il campo é conservativo in D.
ii) Le primitive sono $U(x,y) = x\log(x+y) + K \quad , \quad K \in \mathbb{R}$.
iii) L'integrale vale zero perché la ciconferenza é una curva chiusa situata nell'insieme D dove il campo é conservativo.

Esercizio 2. (Punti 3 o punti -1) - Si consideri la funzione $f(x, y, z) = z$ e sia γ la curva in $\mathbb{R}^3$ definita da :

$$\gamma(t) = (3 \sin t \quad , \quad 3 \cos t \quad , \quad 4t) \quad , \quad t \ \in [0, \pi].$$

L' integrale : $\int_\gamma f(x, y, z) ds$ é uguale a :

(A) 0 ; (B) $10\pi^2$

(C) 20π ; (D) $5\pi^2$.

RISPOSTA ESATTA : B

Esercizio 3. (Punti 2 o punti -1) - Sia γ la curva piana che é rappresentata dall'equazione in coordinate polari : $\rho(\theta) = 2\,\theta^2 \quad , \theta \in \ [0, \pi]$. La sua velocitá scalare é :

(A) $\sqrt{2\theta^2 + 4\theta}$; (B) $(1\ , 4\theta)$

(C) $\sqrt{4\theta^4 + 16\theta^2}$; (D) 4θ

RISPOSTA ESATTA : C

Esercizio 4. (Punti 10)
i) Calcolare :

$$\int\int_D y \quad dx\, dy$$

dove D é il dominio compreso fra l'asse delle ascisse e il grafico della funzione $g(x) = \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
ii) Calcolare :

$$\int\int_D |y| \quad dx\, dy$$

dove $D = \{(x, y) \ : \ \ |y| \le \cos x,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

SOLUZIONE :
i) L'insieme D é normale rispetto all'asse x , infatti si scrive come $D = \{(x, y) \ : \ 0 \le y \le \cos x,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$. Pertanto si ha :

$$\int\int_D y \quad dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\int_0^{\cos x} y \ dy] dx \ = \frac{\pi}{8}$$

ii) Per la proprietá del valore assoluto si ha che $D = \{(x, y) \ : \ \ -\cos x \le y \le \cos x,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$. Pertanto si ha :

$$\int\int_D y \quad dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\int_{-cosx}^{\cos x} y \ dy] dx \ = \frac{\pi}{4}$$

Alternativamente si puó scrivere l'integrale come somma di due integrali a seconda del segno di y.

Esercizio 5. (Punti 3 o -1) - Sia $D = \{(x,y) \ : \ x > 0\}$ e $f(x,y)$ una funzione continua. Allora $\int\int_D f(x,y) \ dx\,dy$ é uguale a :

(A) $\lim_{b\to+\infty} \int\int_{[0,b]\times[0,b]} f(x,y)\,dx\,dy$

(B) $\lim_{b\to+\infty} \int\int_{[0,b]\times[-b,b]} f(x,y)\,dx\,dy$

(C) $\lim_{R\to+\infty} \int\int_{B_R} f(x,y)\,dx\,dy$; B_R é il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio R.

(D) $\lim_{b\to+\infty} \int\int_{[-b,b]\times[-b,b]} f(x,y)\,dx\,dy$

RISPOSTA ESATTA : B

Esercizio 6. (Punti 3 o -1) - Sia $D = \{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \leq 2\} \bigcap \{(x,y) \ : \ y > 0\}$ e $f(x,y) = x - y$. Allora $\int\int_D f(x,y) \ dx\,dy$ dopo il cambiamento di variabili in coordinate polari diventa :

(A) $\int_0^{\pi}[\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2(\cos\theta - \sin\theta)d\rho]d\theta$

(B) $\int_0^{\sqrt{2}}[\int_0^{\pi} \rho(\cos\theta - \sin\theta) \ d\theta]d\rho$

(C) $\int_0^{\pi}[\int_0^{\sqrt{2}} \rho \ d\rho]d\theta$

(D) $\int_0^{\sqrt{2}}[\int_0^{\pi} \sqrt{2}\rho^2(\cos\theta - \sin\theta) \ d\rho]d\theta$

RISPOSTA ESATTA : A

Esercizio 7. (Punti 2 o -1) - Sia F il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ definito da :

$$F(x,y,z) = \big(y - x \ , \ z^2 \ , \ 2\big)$$

il rotore di F é :

(A) $rotF = (0 \ , \ 0 \ , \ 0)$; (B) $rotF = 2z$

(C) $rotF = (1 \ , \ -2z \ , \ 1)$; (D) $rotF = (-2z \ , \ 0 \ , \ -1)$

RISPOSTA ESATTA : D