

A

I ESONERO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA II - 2/5/2017

Nome e matricola :

Esercizio 1. (Punti 10) - Si consideri il seguente sistema lineare :

$$\begin{cases} y - 3z & = 1 - x \\ 2x - 1 & = y - z \\ 5x + 2y - 4 & = 8z \end{cases}$$

- i) stabilire se ammette soluzioni e quante ne ammette, motivando la risposta
- ii) trovare tutte le soluzioni (utilizzando la teoria delle matrici)
- iii) detta A la matrice dei coefficienti del sistema e L_A l'applicazione lineare corrispondente, stabilire se L_A é iniettiva, suriettiva o biiettiva.

Soluzione : i) Il sistema ha lo stesso numero di equazioni e incognite ma il rango della matrice dei coefficienti non é massimo ma é 2. Poiché anche il rango della matrice completa é 2 per il teorema di Rouché Capelli il sistema é compatibile e ammette infinite soluzioni.

ii) Le soluzioni sono : $(\frac{2}{3}(z + 1), \frac{1}{3}(7z + 1), z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

iii) L_A non é iniettiva perché il sistema assegnato ha infinite soluzioni. Non é neppure suriettiva perché é facile trovare un vettore $b = (b_1, b_2, b_3)$ tale che il sistema $A(x, y, z) = b$ non ammette soluzioni perché la matrice completa ha rango 3.

Esercizio 2. (Punti 10) - Per la seguente funzione di due variabili :

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x - y + 3xy$$

- i) trovare i punti critici in tutto l'insieme di definizione
- ii) stabilire se i punti critici sono estremi relativi o punti di sella
- iii) considerato l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, 2], y \leq 0\}$ stabilire se la funzione é limitata inferiormente e/o superiormente in D e trovare gli eventuali punti di minimo o massimo assoluti.

Soluzione : i) La funzione ha l'unico punto critico $P = (1, -1)$
ii) Poiché il determinante della matrice hessiana nel punto P é negativo la forma quadratica corrispondente é indefinita e quindi il punto P é un punto di sella.
iii) Se $y \in D$ e $y \rightarrow -\infty$ la funzione tende a $+\infty$, quindi non é limitata superiormente. Per lo stesso motivo e poiché la variabile x appartiene a un intervallo limitato, si vede che la funzione é limitata inferiormente in D e ammette minimo. Analizzando la funzione sulla frontiera di D si vede che il minimo assoluto é $-1/4$ ed é raggiunto nei punti $(1/4, 0)$ e $(2, -5/2)$.

Esercizio 3. (Punti 3 o punti -1) - Sia A la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

un suo autovettore é :

(A) $v = (0, 1)$; (B) $v = (3, 0)$

(C) $v = (2, 1)$; (D) non esistono autovettori di A .

RISPOSTA : A o B

Esercizio 4. (Punti 2 o punti -1) - Sia A la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Quale delle seguenti affermazioni é vera :

(A) A é invertibile ; (B) A non é invertibile

(C) A ha rango 3 ; (D) A ha rango 1

RISPOSTA : B

Esercizio 5. (Punti 2 o -1) - Il piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = y^2 \operatorname{tg} x$ nel punto $P = (\frac{\pi}{4}, 1)$ ha equazione :

(A) $z = x + y + \frac{\pi}{2}$; (B) $1 + 2y + 2z + x = \pi$

(C) $4x + 4y - 2z - \pi = 2$; (D) $z = 4x + 4y + \pi$

RISPOSTA : C

Esercizio 6. (Punti 3 o -1) - L'insieme di definizione D della funzione

$$f(x, y) = \frac{\log(\sin x + 2)}{e^{\sqrt{x+y}}} \quad \text{é :}$$

(A) $D = \{(x, y) : x \in [0, 2\pi] \text{ e } y > -x\}$ ed é un insieme chiuso e limitato.

(B) $D = \{(x, y) : y > -x\}$ ed é un insieme aperto e non limitato.

(C) $D = \{(x, y) : y \geq -x\}$ ed é un insieme chiuso e non limitato.

(D) $D = \{(x, y) : x \in [0, \pi] \text{ e } y > -x\}$ ed é un insieme non limitato.

RISPOSTA : C