ISTITUTO MATEMATICO UNIVERSITA' DEGLI STUDI - ROMA

CAPITOLO I

I NUMERI REALI

1 - I numeri razionali.

In questo Capitolo ci proponiamo di richiamare quelle nozioni di teoria dei numeri che sono fondamentali per l'analisi matematica. Più precisamente faremo vedere come, partendo dai numeri naturali, si pervenga attraverso successive generalizzazioni del concetto di numero, a costruire la cosiddetta teoria dei numeri reali.

Talune di queste generalizzazioni si incontrano già nell'aritmetica e nell'algebra elementare e di queste faremo soltanto un brevissimo cenno.

I numeri naturali o interi traggono origine dell'operazione del contare e nell'aritmetica elementare si studiano le eguaglianze e diseguaglianze e le operazioni ad essi relative. Tali operazioni si sogliono distinguere in operazioni dirette (addizione e moltiplicazione) ed operazioni inverse (sottrazione e divisione). Queste ultime si differenziano dalle prime due per il fatto che esse non sono sempre eseguibili. Così, per esempio, sottrarre a da b significa trovare un terzo numero c che sommato ad a dia b, e questa operazione, almeno se si vuol restare nel campo dei numeri naturali, è possibile solo se a è minore o eguale a b.

Per far sì che le operazioni inverse abbiano sempre significato occorre ampliare il concetto di numero, introducendo nel modo già noto, i numeri negativi e i numeri frazionari.

I numeri interi e frazionari, positivi o negativi, si chiamano *numeri razionali*.

Nel sistema di numerazione decimale un numero razionale non intero si può in generale rappresentare con un numero decimale illimitato e periodico; così, per esempio

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots, \qquad -\frac{1}{6} = -\,0,1666\ldots$$

Fanno eccezione soltanto quei numeri fratti il cui denominatore può ridursi ad una potenza di 10, i quali vengono rappresentati da numeri decimali finiti:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2 .$$

Anche tali numeri, come pure quelli interi, possono però considerarsi come numeri decimali illimitati periodici, aggiungendo dopo la loro ultima cifra decimale infiniti zeri; così per esempio, si può scrivere:

$$0,2 = 0,2000\ldots, \qquad 1 = 1,000\ldots$$

Viceversa ogni numero decimale illimitato periodico può essere sempre trasformato in un numero frazionario valendosi della *frazione generatrice*, cioe' di quella frazione che ha per numeratore le cifre del periodo e per denominatore altrettanti nove; così per esempio:

$$0,313131\ldots = \frac{31}{99}$$

$$0,1666 = 0,1 + 0,0666\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

Giova a questo proposito di osservare che un numero decimale illimitato con periodo 9 e il numero che da esso si ottiene aumentando di una unità l'ultima cifra differente da 9 e sopprimendo tutti i successivi 9 vengono, col predetto procedimento, trasformati nella stessa frazione; si ha per esempio :

$$0,1999\ldots = 0,1 + 0,099\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{9}{9} = \frac{2}{10} = 0,2 .$$

Se dunque vogliamo identificare la classe dei numeri razionali con quella dei numeri decimali periodici, dobbiamo convenire di considerare eguali due numeri decimali ottenuti l'uno dall'altro col suddetto procedimento.

Una proprietà importante dei numeri razionali è che, dati comunque due di tali numeri, si può sempre eseguire su di essi una qualsiasi delle quattro operazioni aritmetiche, fatta eccezione per la divisione per zero, ottenendo come risultato un nuovo numero razionale.

La classe dei numeri razionali si rivela però ancora troppo ristretta quando si voglia eseguire l'estrazione di radice di un numero positivo. E' ben noto, infatti, che non esiste, per esempio, nessun numero razionale che abbia per quadrato 2.

Nell'aritmetica si insegna un procedimento per costruire il cosiddetto valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ a meno di $\frac{1}{10^h}$; tale numero è precisamente il più grande dei numeri decimali finiti con h cifre decimali il cui quadrato sia minore di 2. La successione dei valori approssimati per difetto di $\sqrt{2}$, che così si ottiene, è la seguente:

$$1;\quad 1,4;\quad 1,41;\quad 1,414;\quad 1,4142;\ldots$$

Sembra allora naturale di dire che $\sqrt{2}$ è eguale al numero decimale illimitato non periodico, 1,4142..., cioè al numero decimale avente come h^{ma} cifra dopo la virgola l'ultima cifra del valore di $\sqrt{2}$ approssimato per difetto a meno di $\frac{1}{10^h}$. Tale eguaglianza non ha però, almeno per il momento, un significato preciso, giacchè le espressioni del tipo 1,4142....., non sono altro che simboli a cui potrà darsi il nome di numeri solo quando si siano definite le relazioni di eguaglianza e di diseguaglianza e le operazioni ad essi relative. Per chiarire questo punto osserviamo che l'eguaglianza $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ dovrebbe implicare l'altra $2 = (1,4142\ldots)^2$ la quale non ha per ora alcun significato, giacchè non sappiamo ancora che cosa si debba intendere per quadrato di un numero decimale illimitato non periodico.

I paragrafi che seguono sono appunto dedicati allo studio di tali nuovi numeri.

2 - I numeri reali.

Diremo *numero reale* il simbolo formato da un numero intero, preceduto da un segno (+ o −) e seguito da una virgola o da una successione di cifre decimali:

$$\pm\, N, C_1C_2C_3\ldots$$

con la convenzione di omettere il segno se tutte le cifre sono eguali a zero, nel qual caso il numero si considera uguale a zero.

Un numero reale si dice *razionale* se la successione delle sue cifre decimali è periodica, *irrazionale* nel caso contrario.

I numeri reali diversi da zero si distinguono in positivi e negativi a seconda del segno che li precede e si chiama *valore assoluto* di un numero reale il numero stesso preso col proprio segno o col segno cambiato secondo che esso e' positivo o negativo.

Il valore assoluto di zero e' uguale a zero. Il valore assoluto di un numero reale e' dunque sempre un numero non negativo.

Se un numero reale si designa con una lettera, diciamo a, il suo valore assoluto si indicherà col simbolo $|a|$.

Due numeri reali si dicono *eguali* se hanno lo stesso segno e tutte le cifre eguali, ovvero se, sempre avendo lo stesso segno, uno di essi è periodico di periodo 9 e l'altro si ottiene dal primo sostituendo i 9 con degli 0 e aumentando di un'unità l'ultima cifra differente da 9.

Due numeri reali eguali in valore assoluto e di segno contrario si dicono *opposti*. L'opposto di zero e' uguale a zero.

Dati due numeri a e b diseguali, non negativi, diremo che a e' *maggiore* (*minore*) di b se la prima delle cifre di a che non è eguale alla corrispondente cifra di b è di essa *maggiore* (*minore*).

Di due numeri negativi diremo *maggiore* (*minore*) quello che ha valore assoluto minore (maggiore); inoltre tutti i numeri positivi e lo zero si dicono maggiori di tutti i numeri negativi.

Giova osservare che, se i numeri considerati sono in particolare razionali, la relazione di eguaglianza e diseguaglianza tra di essi stabilita dalle precedenti definizioni concorda con quella considerata nell'algebra elementare.

Nel seguito diremo talvolta *corpo reale* la totalità dei numeri reali, *corpo razionale* quella dei numeri razionali.

3 - Operazioni coi numeri reali.

Se a è un numero reale indicheremo nel seguito con a_n il numero decimale finito che si ottiene da a trascurando tutte le cifre decimali dopo la n^{ma}. Così, posto

$$a = \pm N, C_1C_2C_3 \dots$$

sarà:

$$a_1 = \pm N, C_1 \; ; \qquad a_2 = \pm N, C_1C_2 \; ; \qquad a_3 = \pm N, C_1C_2C_3 ; \dots$$

Dati ora due numeri reali a e a' consideriamo le somme:

$$s_1 = a_1 + a_1' \; ; \qquad s_2 = a_2 + a_2' ; \; \dots$$

Osserviamo ora che due consecutive di tali somme s_n e s_{n+1} differiscono per meno di due unità sulla n^{ma} cifra decimale.

Si ha infatti:

$$|s_{n+1} - s_n| \leq (C_{n+1} + C_{n+1}') \cdot 10^{-(n+1)} < 2 \cdot 10^{-n}$$

Dopo ciò sarebbe facile far vedere che si può trovare un valore n_1 di n tale che tutti i numeri $s_{n_1}, s_{n_1+1}, s_{n_1+2}, \dots$ hanno la stessa parte intera M, un altro valore di n, diciamo $n_2 \geq n_1$, tale che tutti i numeri $s_{n_2}, s_{n_2+1}, s_{n_2+2}, \dots$ hanno la stessa prima cifra decimale γ_1 e così via. Il numero:

$$s = \pm M, \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \dots$$

preso col segno comune a tutte le somme $s_1, s_2, s_3, \dots$, è per definizione la somma dei due numeri a e a'.

In modo analogo si definiscono le altre operazioni aritmetiche.

Più precisamente, detta O una di tali operazioni, indichiamo con o_n il risultato che si ottiene eseguendola sui numeri a_n ed a_n'; è facile rendersi conto che tutti i numeri $o_1, o_2, o_3, \dots$ hanno lo stesso segno e che inoltre a partire da un certo valore di n essi hanno tutti la stessa parte intera M, a partire da un altro valore di n anche la stessa prima cifra decimale γ_1 e così via[1]. Il numero:

$$o = \pm M, \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \dots$$

preso col segno che compete a tutti i numeri o_n è per definizione il risultato dell'operazione O eseguita sui numeri a ed a'.

In tal modo, dati due numeri reali qualunque a e a', si viene ad attribuire un significato preciso a ciascuno dei simboli:

---

(1) Nel caso della divisione gli o_n dovranno essere considerati soltanto a partire da quel valore di n per cui e' $a_n \neq 0$.

$$a+a', \quad a-a', \quad a\cdot a', \quad \frac{a}{a'},$$

fatta eccezione per l'ultimo di essi nel caso in cui sia $a'=0$.

A proposito delle operazioni fra numeri reali ora definite sussistono le seguenti proposizioni sulla cui dimostrazione, peraltro assai facile, non ci soffermeremo.

I - Per i numeri razionali le definizioni sopra considerate sono equivalenti a quelle poste nell'aritmetica e nell'algebra elementare.

II - L'eguaglianza di due numeri reali gode della proprietà riflessiva (ogni numero è eguale a se stesso), simmetrica (se $a=a'$ anche $a'=a$), transitiva (due numeri eguali a un terzo sono eguali fra di loro).

III - L'operazione di somma di due o più numeri reali gode delle proprietà commutativa e associativa, espresse dalle formule:

$$a+a' = a'+a$$

$$(a+a')+a'' = a+(a'+a'')$$

IV - La differenza di due numeri reali è eguale alla somma del minuendo e dell'opposto del sottraendo:

$$a-a' = a+(-a').$$

V - L'operazione di prodotto di due numeri reali gode delle proprietà commutativa, associativa e della proprietà distributiva rispetto alla somma, espresse rispettivamente dalle formule:

$$a\cdot a' = a'\cdot a$$

$$(a\cdot a')\cdot a'' = a\cdot(a'\cdot a'')$$

$$(a+a')\cdot a'' = aa''+a'a''.$$

VI - Se il prodotto di due o più numeri reali è nullo, uno almeno dei fattori è eguale a zero.

VII - Il prodotto e il quoziente di due numeri reali sono positivi se i due numeri hanno lo stesso segno, negativi in caso contrario.

VIII - Se a,b,c,d, sono quattro numeri reali, di cui gli ultimi due differenti da zero, si ha:

$$\frac{a}{c} = \frac{a\cdot d}{c\cdot d}, \quad \frac{a}{c}+\frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c}+\frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}.$$

IX - Se a e a' sono numeri reali qualsiasi si ha:

$$\big||a|-|a'|\big| \le |a\pm a'| \le |a|+|a'|$$

$$|a\cdot a'| = |a|\cdot|a'|.$$

Queste proposizioni esprimono in sostanza che tutte le regole e proprietà del calcolo con le prime quattro operazioni fondamentali restano inalterate quando si passa dal campo dei numeri razionali a quello più ampio dei numeri reali.

Nel seguito avremo spesso occasione di considerare delle somme di più addendi; se tali addendi sono indicati tutti con una unica lettera affetta da diversi indici, per esempio con $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la loro somma $a_1+a_2+\ldots+a_n$ si indicherà con:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i .$$

In altre parole il simbolo $\sum_{i=1}^{n}$ premesso alla lettera a_i sta ad indicare che bisogna eseguire la somma di tutti i valori che assume a_i quando all'indice i si danno successivamente i valori $1,2,\ldots,n$. Tale simbolo si legge: *sommatoria per i che va da 1 ad n*. Esso può essere talvolta sostituito dall'altro equivalente $\sum_{i}^{1\ldots n}$. Notiamo anche che, in forza del significato attribuito a tale simbolo, è lecito sostituire in esso la lettera i con qualunque altra; si ha così per esempio

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Si osservi pure che, se $m<n$, si ha la proprietà associativa della somma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i .$$

Avvertiamo anche che il simbolo di sommatoria, opportunamente modificato, si adopera anche per indicare una somma di quantità dipendenti da due o più indici. Così per esempio, se $a_{11}, a_{12}, a_{21}, \dots, a_{n-1,n}, a_{nn}$ sono n^2 quantità dipendenti da due indici, la loro somma potrà essere indicata con

$$\sum_{r,s}^{1\dots n} a_{rs} .$$

Una tale sommatoria dicesi *doppia*, laddove quelle di quantita' dipendenti da un solo indice diconsi *semplici*. Per la proprietà associativa della somma, è sempre possibile esprimere una sommatoria doppia mediante due successive sommatorie semplici. Si ha così, con ovvio significato dei simboli:

$$\sum_{r,s}^{1\dots n} a_{rs} = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{rs} \right)$$

o anche:

$$\sum_{r,s}^{1\dots n} a_{rs} = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} a_{rs} \right),$$

formule queste che spesso si scrivono sopprimendo le parentesi a secondo membro. Dal confronto di tali formule si deduce immediatamente l'eguaglianza:

ISTITUTO ... DEGLI STUDI ... ROMA

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} a_{rs} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} ,$$

che dicesi *formula di inversione dell'ordine di sommazione.*

Avvertiamo infine che il simbolo di sommatoria Σ sara' tal volta adoperato, sempre per indicare delle somme di più addendi, anche con modalità un po' diverse da quelle fin qui indicate: in tali casi saranno dati volta per volta gli opportuni chiarimenti. Talvolta riuscira' anche utile di adoperare il simbolo

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

per indicare il prodotto dei numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Si osservi a questo proposito che se $m<n$ la proprieta' associativa del prodotto puo' esprimersi mediante le formule

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i \right) \left(\prod_{i=m+1}^{n} a_i \right) .$$

4 - Potenze e radici dei numeri reali.

Si chiama *potenza del numero reale* a *di esponente* n (intero positivo) e si designa col simbolo a^n il prodotto di n fattori eguali ad a.

Si pone anche per definizione (se $a \neq 0$)

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} .$$

Per il calcolo con le potenze intere (positive o negative) dei numeri reali valgono le stesse regole che si applicano nel caso dei numeri razionali, sussistono cioè, come è facilissimo dimostrare, le seguenti formule:

$$(1) \qquad \begin{cases} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \end{cases}$$

nelle quali m ed n sono numeri interi positivi o negativi.

L'operazione inversa dell'elevazione a potenza è l'estrazione di radice : si chiama *radice* n^{ma} di un numero reale a e si designa con il simbolo $\sqrt[n]{a}$, un numero la cui potenza n^{ma} sia eguale ad a.

Vogliamo far vedere che se a è positivo esiste sempre la radice n^{ma} di a, vale a dire che *nel campo dei numeri reali l'etrasione di radice di un numero positivo è sempre possibile.*

Sia N il più grande numero intero la cui potenza n^{ma} non supera a; N,C_1 il più grande numero con una sola cifra decimale la cui potenza n^{ma} non supera a e così via. Detto b il numero reale $N,C_1C_2,\ldots$ dico che si ha $b^n = a$ ossia $b = \sqrt[n]{a}$.

E invero riesce intanto qualunque sia h:

$$(N,C_1C_2\ldots C_h)^n \leq a < (N,C_1C_2\ldots C_h + 10^{-h})^n$$

$$N,C_1C_2\ldots C_h \leq b < N,C_1C_2\ldots C_h + 10^{-h}$$

da cui ovviamente:

$$(2) \qquad |b^n - a| < (N,C_1C_2\ldots C_h + 10^{-h})^n - (N,C_1C_2\ldots C_h)^n .$$

Ora, se α e β sono due numeri reali qualsivoglia, dalla identità:

$$(\alpha^n - \beta^n) = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$$

si deduce subito che, detto A un numero maggiore sia di $|\alpha|$ che di $|\beta|$, riesce:

$$|\alpha^n - \beta^n| \leq nA^{n-1}|\alpha - \beta| .$$

Applicando questa diseguaglianza si ricava dalla (2)

$$|b^n - a| < \frac{n(N+1)^{n-1}}{10^h} .$$

Poichè h è arbitrario il secondo membro di questa diseguaglianza è un numero che può rendersi arbitrariamente piccolo, e ciò è possibile soltanto se, come appunto volevamo dimostrare, si ha $b^n = a$.

Se ora a è un numero reale negativo bisogna distinguere due casi.

Se n è dispari, detta b la radice n^{ma} di $-a$, riesce:

$$(-b)^n = (-1)^n \cdot b^n = -1 \cdot (-a) = a ,$$

da cui :

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a} .$$

Se invece n è pari si riconosce subito che la radice n^{ma} di a non esiste giacchè, per la regola dei segni, il prodotto di un numero pari di fattori ha sempre per risultato un numero positivo.

Per completare questo paragrafo vediamo come si definisce la potenza ad esponente p qualunque di un numero reale positivo a.

Occorre distinguere tre casi:

I - L'esponente p è un numero razionale della forma $\frac{1}{n}$ con n intero positivo: si pone allora per definizione:

$$a^p = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} .$$

II - L'esponente p è un numero razionale della forma $\frac{m}{n}$ con n intero positivo ed m intero positivo o negativo; si pone pe definizione

$$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

III - L'esponente p è un numero reale qualunque; sia allora p_n il numero razionale che si ottiene da p trascurando tutte le sue cifre dopo la n^{ma} e consideriamo, secondo le definizioni precedentemente stabilite, i numeri:

$$a^{p_1},\ a^{p_2}, \dots,\ a^{p_n}, \dots$$

Si potrebbe far vedere, ma noi ce ne asteniamo per brevità, che tutti i numeri di questa successione corrispondenti a valori di n maggiori di un certo n_1 hanno la stessa parte intera N, tutti quelli corrispondenti a valori di n maggiori di un certo $n_2 \geq n_1$ hanno anche la stessa cifra decimale C_1 e così via. Dopo ciò si pone per definizione:

$$a^p = N, C_1 C_2 \dots$$

Il calcolo con le potenze ad esponente qualunque dei numeri reali positivi è retto dalle stesse leggi che vigono nel caso degli esponenti interi, vale a dire che le formule (1) continuano a sussistere anche quando i numeri m ed n sono numeri reali qualunque.

5 - Logaritmi.

Dati due numeri positivi a e b, di cui il secondo diverso da 1, si chiama *logaritmo* del numero a in base b quel numero x per il quale riesce:

$$b^x = a.$$

Tale numero si designa col simbolo $\log_b a$.

Si potrebbe agevolmente dimostrare che ogni numero reale positivo a possiede un logaritmo in base b e che se $b > 1 (< 1)$ tale logaritmo è positivo nullo o negativo secondo che a è maggiore (minore) eguale o minore (maggiore) di 1.

Le regole per il calcolo con le potenze forniscono altrettante regole per il calcolo coi logaritmi, le principali delle quali sono espresse dalle seguenti formule:

$$\log_b \frac{1}{a} = -\log_b a$$

$$\log_b (a \cdot a') = \log_b a + \log_b a'$$

$$\log_b a^p = p \log_b a$$

$$\log_b a = \log_c a \cdot \log_b c.$$

Nei calcoli numerici ci si serve in generale dei logaritmi in base 10, detti anche *volgari* o *di Briggs*. In molte questioni di analisi torna invece comodo di considerare i logaritmi *naturali* o *iperbolici*, che sono quelli aventi per base il numero:

$$e = 2,7182818284\dots$$

Tale numero, detto anche *numero di Neper*, è uno speciale numero irrazionale sulla cui definizione torneremo nel seguito(*).
Poichè è $\log_{10} e = 0,43429448\dots$ il passaggio dai logaritmi decimali a quelli naturali si fa con la formula:

$$\log_{10} a = 0,43429448\dots \log_e a$$

Notiamo infine che non ha senso di parlare di logaritmi di numeri negativi perchè una qualsiasi potenza della base b è sempre per definizione un numero positivo.

(*)- Capitolo X, num.12.

---

6 - Rappresentazione geometrica dei numeri reali.

Assunto un certo segmento u come unita' di misura dei segmenti, si dice che un segmento s è commensurabile con u ed ha per misura $\frac{n}{m}$ (n ed m positivi) se avviene che s è la somma di n segmenti tutti eguali alla m^a parte di u.

Nella geometria elementare si mostra, però, che esistono segmenti non commensurabili con l'unità di misura; tale è per esempio la diagonale del quadrato che ha per lato l'unità di misura. Vogliamo ora far vedere, come, valendosi dei numeri reali, si possa attribuire una misura ad un qualsiasi segmento s.

Per questo sia N il più grande numero intero tale che il segmento s_0 somma di N segmenti eguali ad u sia non maggiore di s; C_1 il più grande dei numeri da 0 a 9 tale che il segmento s_1 somma di s_0 e di C_1 segmenti eguali a $^1/_{10}$ di u sia non maggiore di s; C_2 il più grande dei numeri da 0 a 9 tale che il segmento s_2 somma di s_1 e di C_2 segmenti eguali a $^1/_{100}$ di u sia non maggiore di s e così via.

Il numero reale $N, C_1 C_2 \dots$ che si viene così a costruire è per definizione la *misura* del segmento s.

Se s è commensurabile con l'unità di misura tale misura coincide, come sarebbe facile mostrare, con quella precedentemente definita.

Viceversa, se la misura ora definita è un numero razionale, s è commensurabile con l'unità di misura.

Come applicazione di questo concetto vogliamo ora mostrare come si possano rappresentare tutti i numeri reali mediante i punti di una retta.

Su una retta r fissiamo un'origine O e un verso (per esempio quello che va da sinistra verso destra) che diremo positivo.

Scelta un'unità di misura u per i segmenti, possiamo ad ogni punto A della retta far corrispondere il numero reale a che ha per valore assoluto la misura del segmento OA e il segno + o - a seconda che il segmento orientato OA è concorde o discorde col verso positivo prestabilito sulla retta.

Se in particolare il verso fissato su r è quello che va da sinistra verso destra, ai punti situati a destra di O corrispondono numeri positivi, a quelli a sinistra numeri negativi.

Il numero a sopra definito si chiama anche l'*ascissa* del punto A.

Facciamo ora vedere come, viceversa, ad ogni numero reale a si possa far corrispondere un punto A della retta r.

Se a è razionale e della forma $\frac{m}{n}$ consideriamo il segmento s somma di m segmenti tutti eguali a $\frac{1}{n}$ di u e riportiamo tale segmento sulla retta r a partire da O nel senso positivo o in quello negativo secondo che a è positivo o negativo; si ottiene così un punto A a cui, secondo la convenzione precedente, corrisponde appunto il numero a.

Se a è un numero reale qualunque non razionale, l'esistenza del punto A non si può dimostrare se non si ammette il seguente *postulato di Cantor* o anche *postulato della continuita'* *della retta:*

Siano date su una retta r due classi di punti $A_1, A_2, \dots, A'_1, A'_2, \dots$ *tali che:*

1) ogni punto della prima classe è a sinistra di ogni punto della seconda;

2) data una quantità positiva ε *piccola a piacere esistono due punti* A_s *e* A'_s *tali che il segmento* $A_s A'_s$ *ha misura minore di* ε.

Esiste un punto A *della retta che separa i punti delle due classi.*

Ammesso questo postulato, supponiamo, per fissare le idee, che il numero a sia positivo e che il verso fissato su r sia quello che va da sinistra a destra e consideriamo i numeri $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ definiti al n.3 e i numeri:

$$a'_1 = a_1 + \frac{1}{10}, \quad a'_2 = a_2 + \frac{1}{100}, \dots, \quad a'_n = a_n + \frac{1}{10^n} \dots$$

Poichè tali numeri sono razionali a ciascuno di essi corrisponde su r un ben determinato punto. Le due classi di punti così costruite si trovano nelle condizioni considerate nel postulato di Cantor ed ammettono un punto di separazione A il quale, ovviamente, ha proprio per ascissa il numero a.

Il risultato a cui siamo pervenuti si può sinteticamente esprimere dicendo che *fra i numeri reali e i punti di una retta si può stabilire una corrispondenza biunivoca.*

7 – Partizioni del corpo razionale.

Si dice che si è effettuata *una partizione del corpo razionale*, quando, con legge arbitraria, si è divisa la totalità dei numeri razionali in due classi A e B in modo che ciascun numero della prima classe sia minore di ciascun numero della seconda.

Un modo molto semplice di effettuare una partizione del corpo razionale consiste nello scegliere arbitrariamente un numero reale α e nel considerare le classi A e B dei numeri razionali che sono rispettivamente minori di α e non minori di α. Un'altra partizione sostanzialmente equivalente alla prima, si ottiene ponendo in A tutti i numeri razionali non maggiori di α e in B tutti quelli maggiori di α.

In entrambi i casi si dice che α è l'*elemento di separazione* delle due classi A e B.

Vogliamo ora dimostrare che viceversa, data una arbitraria partizione del corpo razionale, mediante due classi A e B, esiste un ben determinato numero reale α che è l'elemento di separazione delle due classi, tale cioè che ogni numero razionale maggiore di esso appartiene a B e ogni numero razionale minore di esso appartiene ad A.

Supponiamo, tanto per fissare le idee, che la classe A contenga dei numeri positivi e sia N il più grande numero intero non negativo contenuto in A.

Tra i numeri:

$$N,0\,;\,N,1\,;\,\ldots\,;\,N,9$$

sia N,C_1 il più grande di quelli appartenenti ad A. Tra i numeri:

$$N,C_1;\ N,C_11;\ldots;\ N,C_19$$

sia N,C_1C_2 il più grande di quelli appartenenti ad A.

Così proseguendo si viene a costruire un numero reale:

$$\alpha = N,C_1C_2C_3\ldots$$

che è certo un numero non minore di tutti i numeri di A.

Pertanto ogni numero razionale maggiore di α appartiene a B. D'altra parte un numero razionale a minore di α deve risultare minore anche di qualcuno dei numeri:

$$N \qquad N,C_1 \qquad N,C_1C_2 \ \ldots$$

e poichè tali numeri appartengono ad A, non può appartenere a B ed appartiene quindi anche esso ad A.

La corrispondenza biunivoca che abbiamo dimostrato sussistere tra la totalità dei numeri reali e quella delle partizioni del corpo razionale conduce alla identificazione dei due concetti.

Si potrebbe cioe costruire una teoria dei numeri reali definendo direttamente come numero reale ogni partizione del corpo razionale.

Una tale teoria, benchè più complicata di quella da noi precedentemente svolta, presenterebbe il vantaggio di introdurre i numeri reali in modo indipendente dal sistema di numerazione decimale.

Il lettore potrà trovarne un'ampia trattazione nelle *Lezioni di Analisi Matematica* di R Caccioppoli (Libreria Ed. Treves di Leo Lupi, Napoli).

8 – Una proprietà dei numeri reali.

Saranno fondamentali per il seguito le seguenti proprietà dei numeri reali.

I - *Se* a *e* b *sono due numeri reali ed è* a < b *esiste almeno un numero razionale maggiore di* a *e minore di* b.

Invero se un tale numero non esistesse tutti i numeri razionali maggiori [minori] di a sarebbero anche maggiori [minori] di b e quindi a e b, come elementi di separazione di una stessa partizione del corpo razionale, sarebbero eguali.

II - *Se si dividono tutti i numeri reali in due classi* A *e* B *tali che ogni numero della classe* A *sia minore di tutti i numeri della classe* B, *esiste uno e un sol numero reale* α *tale che ogni numero minore di* α *appartiene ad* A *e ogni numero maggiore di* α *appartiene a* B.

La dimostrazione e' immediata. Sia invero A' la classe dei numeri razionali appartenenti ad A e B' la classe dei numeri razionali appartenenti a B. Poichè ogni numero razionale o appartiene ad A' o appartiene a B' e ogni numero di A' e' minore di tutti i numeri di B', tali classi A' e B' effettuano una partizione del corpo razionale ed ammettono quindi come elemento di separazione un numero reale α.

Ora è evidente che ogni numero b maggiore di α appartiene a B. Infatti se è $b > \alpha$ si può certo trovare un numero razionale b' che sia minore di b e maggiore di α. Poichè tale numero appartiene certo a B' e quindi a B, il numero $b > b'$ non può appartenere ad A e quindi appartiene anch'esso a B. Analogamente si dimostra che ogni numero reale minore di α appartiene ad A.

Che poi α sia l'unico numero che abbia la proprieta' indicata segue dal fatto che se $\alpha' \neq \alpha$ avesse la stessa proprietà tutti i numeri razionali compresi fra α ed α' dovrebbero appartenere sia ad A che a B, cio' che e' assurdo.