$$m - n + p - q = m + p - (n + q), \tag{7}$$

$$(m - n)(p - q) = mp + nq - (mq + np), \tag{8}$$

$$m - n \leq p - q \iff m + q \leq n + p. \tag{9}$$

Ebbene, scriviamo il simbolo di coppia ordinata al posto di quello, non ancora definito, di differenza, ed introduciamo una relazione di equivalenza $\mathcal{R}_{\mathrm{Z}}$ tra coppie $(m, n), (p, q) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N}$ di naturali ponendo

$$(m, n)\, \mathcal{R}_{\mathrm{Z}}\, (p, q) \iff m + q = n + p$$

(cf.(6)). Indichiamo con Z l'insieme quoziente $(\mathrm{N} \times \mathrm{N})/\mathcal{R}_{\mathrm{Z}}$ e con $[m, n]_{\mathrm{Z}}$ l'elemento di Z rappresentato dalla coppia (m, n) di $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$. Definiamo su Z un'addizione, una moltiplicazione ed un ordinamento totale nel modo seguente:

$$[m, n]_{\mathrm{Z}} + [p, q]_{\mathrm{Z}} = [m + p, n + q]_{\mathrm{Z}}$$

(con $m + p$ e $n + q$ somme in N: cf. (7)),

$$[m, n]_{\mathrm{Z}} \cdot [p, q]_{\mathrm{Z}} = [mp + nq, mq + np]_{\mathrm{Z}}$$

(con $mp + nq$ e $mq + np$ somme in N di prodotti in N: cf. (8)),

$$[m, n]_{\mathrm{Z}} \leq [p, q]_{\mathrm{Z}} \iff m + q \leq n + p$$

(dove $m + q \leq n + p$ è la solita disuguaglianza in N: cf.(9)).

Al variare di n in N le classi di equivalenza $[m + n, m]_{\mathrm{Z}}$ hanno esattamente le stesse proprietà dei naturali: dunque, possiamo tranquillamente scrivere $+n$ o n al posto di $[m + n, m]_{\mathrm{Z}}$. Sempre per $n \in \mathrm{N}$ poniamo $[m, m + n]_{\mathrm{Z}} = -n$; infine poniamo $0 = -0 = [m, m]_{\mathrm{Z}}$. Abbiamo così ritrovato gli abituali interi (relativi) $0, 1, -1, 2, -2$, eccetera, la cui totalità è Z. Quest'ultimo insieme è totalmente ordinato, ed in esso sono definite addizione e moltiplicazione.

Oss. Ogni numero $m - n = [m, n]$ con $m < n$ si può scrivere come $[m, m + \underbrace{(n-m)}_{\text{è ben def.}}] = -n + m$

3 I razionali

Sull'insieme delle coppie $(m, n), (p, q), \ldots$, con $m, p \ldots \in \mathbf{Z}$ e $n, q, \ldots \in \mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ si introduce una relazione di equivalenza $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$ ponendo

$$(m, n)\, \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}\, (p, q) \iff mq = np. \tag{10}$$

L'insieme quoziente $(\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}_0)/\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$ è indicato con **Q** e i suoi elementi sono chiamati numeri **razionali**. I razionali sono dunque classi di equivalenza: quella rappresentata dalla coppia $(m, n) \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}_0$ è indicata con uno dei simboli m/n, $\frac{m}{n}$ o mn^{-1}. Data un'altra coppia $(p, q) \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}_0$, e quindi anche la classe di equivalenza p/q da essa rappresentata, trascriviamo la (10) sotto forma dell'abituale criterio di identificazione tra numeri razionali:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \iff mq = np. \tag{11}$$

La (11) implica fra l'altro che $m/n = (-m)/(-n)$, per cui nello studio dei razionali potremo limitarci, ogni volta che ci farà comodo, ai rapporti m/n con n in N invece che in Z_0.

In **Q** si definiscono un'addizione, una moltiplicazione ed un ordinamento:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq},$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m}{n}\frac{p}{q} = \frac{mp}{nq},$$

$$\text{per } m, n \in \mathrm{N} \quad \frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \iff mq \leq np.$$

In particolare, i razionali con denominatori uguali ad 1 hanno le stesse proprietà algebriche degli interi relativi, coi quali possiamo perciò identificarli scrivendo m al posto di $m/1$. Anche in **Q** 1 è elemento neutro rispetto alla moltiplicazione.

Le proprietà (1) – (5) si trasmettono automaticamente da Z a **Q**. In più, siccome 1 vale $m/m = (m/n)(n/m)$ per ogni scelta di interi relativi non nulli m e n, ogni razionale non nullo r è dotato di inverso $1/r$. In conclusione, i razionali costituiscono un **campo totalmente ordinato**, nel senso che per r, s, t dati in **Q** risulta

$$r + s = s + r, \quad (r + s) + t = r + (s + t), \tag{12}$$

$$rs = sr, \quad (rs)t = r(st), \tag{13}$$

$$r + 0 = r, \quad r + (-r) = 0, \tag{14}$$

$$r1 = r, \quad r\,r^{-1} = 1 \text{ per } r \neq 0, \tag{15}$$

$$(r + s)t = rt + st, \tag{16}$$

$$r \leq s \Longrightarrow r + t \leq s + t, \tag{17}$$

$$r \leq s \Longrightarrow rt \leq st \text{ per } t \geq 0. \tag{18}$$

Aggiungiamo che **Q** è **archimedeo**, nel senso che, dato comunque un razionale positivo $r = m/n$, $m \in \mathrm{N}$, esiste un naturale – ad esempio $m + 1$ – maggiore di r.

Passiamo ai numeri **decimali**. Ciascuno di essi è una terna ordinata a di cui il primo termine è un simbolo σ che vale + oppure −, il secondo termine è un intero relativo α^0, il terzo termine è una successione $\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, ...\}$ a valori nell'insieme $\{0, 1, ..., 9\}$. Usiamo le notazioni

$$a = +\alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3... = \alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3... = |a|$$

per $\sigma = +$ (nel qual caso chiamiamo a **positivo o nullo** e scriviamo $a \geq 0$),

$$a = -\alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3... = -|a|$$

per $\sigma = -$ (nel qual caso chiamiamo a **negativo o nullo** e scriviamo $a \leq 0$). Diciamo che a è **periodico**, e che $\gamma^1...\gamma^m$ (per un qualche naturale m) è il suo **periodo**, se esiste un intero $h \geq 0$ tale che $\alpha^{h+1} = \alpha^{h+m+1} = \alpha^{h+2m+1} = ... = \gamma^1$, $\alpha^{h+2} = \alpha^{h+m+2} = \alpha^{h+2m+2} = ... = \gamma^2, ...,$ $\alpha^{h+m} = \alpha^{h+2m} = \alpha^{h+3m} = ... = \gamma^m$. In tal caso scriviamo $|a|$ come

$$\alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3...\alpha^h\dot{\gamma}^1...\dot{\gamma}^m.$$

Se il periodo è 0 scriviamo $\alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3...\alpha^h$ invece di $\alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3...\alpha^h\dot{0}$ (ed eliminiamo anche la virgola per $h = 0$).

L'algoritmo elementare della divisione consente di associare tra loro in maniera biunivoca, dunque di identificare a coppie, i razionali ed i decimali periodici di periodo diverso da 9. Torneremo sui dettagli nella prossima sezione. Qui ci limitiamo a due osservazioni.

La prima osservazione riguarda l'ordinamento in $\mathbf{Q}$. Consideriamo due razionali non negativi $a = m/n$ e $b = p/q$. Se essi sono diversi tra loro le loro rispettive rappresentazioni decimali devono differire per qualche termine: supponiamo che il primo di tali termini si trovi al posto h-esimo. Ciò significa che valgono le identità

$$a = \alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3...\alpha^{h-1}\alpha^h\alpha^{h+1}..., \qquad b = \alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3...\alpha^{h-1}\beta^h\beta^{h+1}..., \tag{19}$$

ovvero le identità

$$a = \alpha^0 + \frac{\alpha^1}{10} + \frac{\alpha^2}{10^2} + \frac{\alpha^3}{10^3} + \cdots + \frac{\alpha^h}{10^h} + \frac{\rho^h}{10^h n}, \quad b = \alpha^0 + \frac{\alpha^1}{10} + \frac{\alpha^2}{10^2} + \frac{\alpha^3}{10^3} + \cdots + \frac{\beta^h}{10^h} + \frac{\sigma^h}{10^h q}$$

con $0 \leq \rho^h$ intero $< n$, $0 \leq \sigma^h$ intero $< q$. Se risulta $\alpha^h < \beta^h$ vale anche la disuguaglianza

$$\alpha^h + \frac{\rho^h}{n} < \beta^h + \frac{\sigma^h}{q},$$

perchè α^h e β^h sono interi mentre $\rho^h/n - \sigma^h/q < 1$; dunque risulta $a < b$ nel senso dell'ordinamento che abbiamo dato a $\mathbf{Q}$. Riassumendo, di due razionali non negativi a e b dati in forma decimale possiamo dire che il primo è più piccolo del secondo se valgono le (19) con $\alpha^h < \beta^h$ per un opportuno valore intero non negativo di h. Per i decimali ≥ 0 questo è il cosiddetto **ordinamento lessicale**, che naturalmente consente poi di confrontare tra di loro le rappresentazioni decimali dei razionali (di segno qualunque).

La seconda osservazione è che per le operazioni tra razionali risulta opportuno, ed anzi in generale indispensabile, utilizzarne le espressioni sotto forma di frazioni piuttosto che le rappresentazioni decimali. Nessuno può negare, ad esempio, che il calcolo del prodotto di 5 per $0,\dot{3}$ è decisamente impossibile con l'abituale algoritmo della moltiplicazione, mentre diviene una banalità una volta che $0,\dot{3}$ sia stato scritto come $1/3$. Vale però la pena tener conto anche dell'abituale algoritmo dell'addizione per calcolare la somma di due decimali periodici di cui uno di periodo qualunque (purchè $\neq 9$) e l'altro di periodo 0.

4 La divisione tra naturali *

Rivediamo l'algoritmo della divisione di un naturale m per un naturale n. Chiamiamo S l'insieme degli interi $p \geq 0$ tali che $np \leq m$. S è finito perchè non contiene numeri $> m$, e di conseguenza è dotato di massimo α^0 (cf. Esercizio 1). Dunque, $\alpha^0 = 0$ se $m < n$, $\alpha^0 = 1$ se $m = n$, $\alpha^0 \geq 1$ se $m > n$. Sia ρ^0 il resto della divisione di m per n, cioè il numero (eventualmente nullo) $m - \alpha^0 \cdot n$. Siccome $\rho^0 < n$ (altrimenti α^0 non sarebbe il $\max S$), l'insieme degli interi non negativi p tali che $np \leq \rho^0 \cdot 10$ è dotato di massimo $\alpha^1 \leq 9$; il resto ρ^1 della divisione di $\rho^0 \cdot 10$ per n è dunque il numero (eventualmente nullo) $\rho^0 \cdot 10 - \alpha^1 \cdot n$. Riassumiamo quanto abbiamo visto fin qui nelle identità

$$\frac{m}{n} = \alpha^0 + \frac{\rho^0}{n} = \alpha^0 + \frac{\alpha^1}{10} + \frac{\rho^1}{10n} = \alpha^0, \alpha^1 + \frac{\rho^1}{10n}.$$

Andiamo avanti: per un generico $h \in \mathrm{N}$ otteniamo l'identità

$$\frac{m}{n} = \alpha^0 + \frac{\alpha^1}{10} + \frac{\alpha^2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha^h}{10^h} + \frac{\rho^h}{10^h n} = \alpha^0, \alpha^1 \ldots \alpha^h + \frac{\rho^h}{10^h n},$$

dove

$$0 \leq \alpha^0 \,(\text{intero}) \leq m, \quad 0 \leq \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^h \,(\text{interi}) \leq 9, \quad 0 \leq \rho^h \,(\text{intero}) < n.$$

Ora, il fatto che i ρ^h siano interi ≥ 0 e $< n$ ha come conseguenza che non ce ne possono essere più di n tutti distinti tra di loro. Dunque esistono $h \geq 0$, $k \geq 1$ tali che $\rho^h = \rho^{h+k}$. Ma allora si ha anche $\alpha^{h+1} = \alpha^{h+k+1}$, per cui $\rho^{h+1} = \rho^{h+k+1}, \ldots$, per cui $\alpha^{h+k} = \alpha^{h+2k}$, e così via: la rappresentazione decimale del numero razionale (positivo) m/n è periodica, ed un suo periodo è $\alpha^{h+1} \ldots \alpha^{h+k}$. *Un* e non *il* periodo, si badi, perchè la stessa rappresentazione decimale ha anche periodo $\alpha^{h+1} \ldots \alpha^{h+2k}$, o $\alpha^{h+1} \ldots \alpha^{h+3k}$, eccetera.

Si noti che *l'algoritmo della divisione non può mai condurre ad una rappresentazione decimale di periodo* 9. Infatti,se così fosse – dunque se tutte le cifre α^{h+1}, α^{h+2},...introdotte qui sopra valessero 9 – il numero n starebbe 9 volte nel numero $\rho^h \cdot 10$ con resto ρ^{h+1}, 9 volte nel numero $\rho^{h+1} \cdot 10$ con resto $\rho^{h+2}, \ldots$, 9 volte nel numero $\rho^{h+k-1} \cdot 10$ con resto $\rho^{h+k} = \rho^h$. Come dire:

$$10\rho^h = 9n + \rho^{h+1},\ 10^2\rho^h = 99n + \rho^{h+2}, \ldots,\ 10^k\rho^h = 9 \ldots 9n + \rho^{h+k} = 9 \ldots 9n + \rho^h$$

– dove $9 \ldots 9$ è la scrittura posizionale del numero $9 \cdot 10^k + \cdots + 9 \cdot 10 + 9$ –, e quindi

$$[10^k - 1]\rho^h = 9 \ldots 9\rho^h = 9 \ldots 9n,$$

cioè l' assurdo $\rho^h = n$.

Ebbene, ogni scrittura decimale periodica $\alpha^0, \alpha^1 \ldots \alpha^h \dot{\gamma}^1 \ldots \dot{\gamma}^m$, purchè di periodo diverso da 9, rappresenta un razionale m/n. Per la precisione risulta

$$\alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3 \ldots \alpha^h \dot{\gamma}^1 \ldots \dot{\gamma}^m = \alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3 \ldots \alpha^h + \frac{\gamma^1 \ldots \gamma^m}{10^h} \frac{1}{10^m - 1}.$$

L'identità qui sopra, da dimostrare, è infatti equivalente alla

$$0,\dot\gamma^1...\dot\gamma^m = \frac{\gamma^1...\gamma^m}{10^m-1},$$

che segue a sua volta, pochè $10^m/(10^m-1) = 1 + 1/(10^m-1)$, dalle identità

$$\frac{\gamma^1...\gamma^m}{10^m-1} = \frac{\gamma^1...\gamma^m}{10^m}\frac{10^m}{10^m-1}$$

$$= \frac{\gamma^1...\gamma^m}{10^m} + \frac{\gamma^1...\gamma^m}{10^{2m}}\frac{10^m}{10^m-1}$$

$$= \frac{\gamma^1...\gamma^m}{10^m} + \frac{\gamma^1...\gamma^m}{10^{2m}} + \frac{\gamma^1...\gamma^m}{10^{3m}}\frac{10^m}{10^m-1},$$

eccetera.

5 I reali

Un numero **reale** a è un decimale eventualmente periodico, ma non di periodo 9. Sono dunque numeri reali i decimali positivi o nulli $a = +\alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3... = \alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3... = |a|$ (**modulo** o **valore assoluto** di a) e quelli negativi o nulli $a = -\alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3... = -|a|$, con esclusione del caso di cifre α^k tutte uguali a 9 da un certo punto in poi. L'insieme dei reali è indicato dal simbolo **R**. E' ovvio che $\mathbf{R} \supset \mathbf{Q}$; i decimali non periodici sono i numeri (reali) **irrazionali**.

L'ordinamento lessicografico dei decimali positivi o nulli, che, lo ricordiamo, è quello per cui $a = \alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3...\alpha^h\alpha^{h+1}...$ è posto $< b = \alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3...\alpha^h\beta^{h+1}...$ se $\alpha^{h+1} < \beta^{h+1}$, consente di attibuire ad **R** un ordinamento totale: basta porre, nel caso di decimali a, b negativi o nulli, $a < b$ per $|b| > |a|$.

R è archimedeo: un reale positivo $\alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3...\alpha^h\alpha^{h+1}...$ è minore del naturale α^0+1.

Siano $a, b \in \mathbf{R}$. Se $a \leq b$ indichiamo con $[a, b]$ l'insieme dei reali c tali che $a \leq c \leq b$. Se $a < b$ indichiamo con $[a, b[$ l'insieme dei reali c tali che $a \leq c < b$, con $]a, b]$ l'insieme dei reali c tali che $a < c \leq b$ e con $]a, b[$ l'insieme dei reali c tali che $a < c < b$. Indichiamo poi con $]-\infty, a]$ ($]-\infty, a[$) l'insieme dei reali $\leq a$ ($< a$) e con $[a, \infty[$ ($]a, \infty[$) l'insieme dei reali $\geq a$ ($> a$).

Sia $S \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $L \in \mathbf{R}$ ($l \in \mathbf{R}$) tale che $L \geq a$ ($l \leq a$) per ogni $a \in S$ diciamo che S è **limitato superiormente (inferiormente)** e che L è un suo **maggiorante** (che l è un suo **minorante**); si vede subito che S ha maggioranti o minoranti $\in \mathbf{R}$ se e solo se ne ha $\in \mathbf{Z}$. Diciamo che S è **limitato** se esso è tanto superiormente che inferiormente limitato. Supponiamo che S non sia limitato superiormente (inferiormente): ciò significa che per ogni $K \in \mathbf{R}$ si può trovare $a \in S$ tale che $a > K$ ($a < K$). Scriviamo allora che $\sup S = \infty$ ($\inf S = -\infty$). Se $\{a_n\}$ è una successione reale la chiamiamo (il)limitata, inferiormente (il)limitata o superiormente (il)limitata a seconda che tale sia l'insieme $S = \{c \in \mathbf{R} | \ \exists a_n = c\}$ dei valori da essa assunti.

Supponiamo che S non solo sia limitato superiormente (inferiormente), ma in più contenga un elemento M (m) tale che $M \geq a$ $(m \leq a)$ per ogni $a \in S$. Diciamo allora che M è il **massimo** $\max S$ (che m è il **minimo** $\min S$) di S.

Non ogni sottoinsieme superiormente (inferiormente) limitato di $\mathbf{R}$ è dotato di massimo (minimo). Sia ad esempio S l'isieme dei reali < 1: se esistesse $\max S$, esso sarebbe banalmente un decimale $0, \mu^1\mu^2...\mu^k...$ (non di periodo 9), dunque minore di $0, \mu^1\mu^2...(\mu^k + 1)...$, anch'esso $\in S$, dove $k \in N$ è scelto in modo tale che $\mu^k < 9$. Passiamo dunque dai concetti di massimo e minimo di $S \subset \mathbf{R}$ a quelli, più generali – e sofisticati–, di **estremo superiore** ed **estremo inferiore** di S, indicati rispettivamente con $\sup S$ e $\inf S$. Se S è limitato superiormente e $\Lambda \in \mathbf{R}$ gode delle due seguenti proprietà:

$\Lambda \geq a$ per ogni $a \in S$,

per ogni $b \in \mathbf{R}$ tale che $\Lambda > b$ esiste $a \in S$ tale che $a > b$,

poniamo $\sup S = \Lambda$. In altri termini, $\sup S$ è – se esiste...– un maggiorante di S, ed anzi il più piccolo dei maggioranti di S. Analogamente, se S è limitato inferiormente e $\lambda \in \mathbf{R}$ è il più grande dei minoranti di S, cioè gode delle due seguenti proprietà:

$\lambda \leq a$ per ogni $a \in S$,

per ogni $b \in \mathbf{R}$ tale che $\lambda < b$ esiste $a \in S$ tale che $a < b$,

poniamo $\inf S = \lambda$.

Le due nozioni appena date sono ovviamente compatibili con la definizione di $\sup S$ come ∞ per S illimitato superiormente e con quella di $\inf S$ come $-\infty$ per S illimitato inferiormente. In ogni caso – cioè in presenza o in assenza di limitatezza inferiore o superiore – valgono le identità

$$\sup S = -\inf(-S), \ \inf S = -\sup(-S)$$

per $-S$ definito come l'insieme degli opposti degli elementi di S. La verifica è immediata. Così come è immediato verificare che S non può avere più di un estremo superiore (inferiore), e che l'*eventuale* massimo (minimo) di S coincide con $\sup S$ ($\inf S$).

Per una successione reale $\{a_n\}$ parliamo di estremo inferiore $\inf_n a_n$ e superiore $\sup_n a_n$ riferendoci a quelli dell'insieme $S = \{c \in \mathbf{R} | \ \exists\, a_n = c\}$ dei valori da essa assunti.

Esercizio 2 Sia $S \subseteq \mathbf{R}$ con $\sup S = \infty$. Dimostrare che, dato comunque $K \in \mathbf{R}$, esistono *infiniti* elementi di S che sono $> K$.

Esercizio 3 Sia S un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ superiormente limitato ma privo di massimo. Dimostrare che, dato comunque $b \in \mathbf{R}$, $b < \sup S$, esistono *infiniti* elementi di S che sono $> b$. Mostrare con un esempio banale che la conclusione non è più necessariamente valida se esiste $\max S$.

Il prossimo risultato mostra che $\mathbf{R}$ gode di una fondamentale proprietà, chiamata **completezza**.

Teorema 1 *Sia $S \neq \emptyset$ un sottoinsieme di* $\mathbf{R}$ *limitato superiormente (inferiormente). Allora S è dotato in* $\mathbf{R}$ *di estremo superiore (inferiore).*

La dimostrazione del Teorema 1 sarà data nella prossima sezione, ma l'idea di fondo su cui essa riposerà può essere fin da ora afferrata su qualche esempio.

Esempio 1 Sia S l'insieme delle somme finite di addendi $1/10^{n^2}$, $n \in \mathbf{N}$, tutti distinti tra di loro. Costuiamo un decimale $\gamma^0, \gamma^1\gamma^2...$ mediante la seguente procedura.

Per un qualunque elemento $\alpha^0, \alpha^1\alpha^2...$ di S si verifica necessariamente $\alpha^0 = 0$: poniamo $\gamma^0 = 0$. Sia $0, \alpha^1\alpha^2... \in S$: α^1 può valere 0 o 1, e noi poñiamo $\gamma^1 = 1$. Per in numeri $0, 1\alpha^2... \in S$ α^2 può valere solo 0, e noi poniamo $\gamma^2 = 0$. Seguendo lo stesso criterio poniamo $\gamma^3 = 0$. Passiamo ai numeri di S della forma $0, 100\alpha^4\alpha^5...$: α^4 può valere 0 o 1, e noi poniamo γ^4 uguale ad 1. Insomma, finiamo per porre $\gamma^k = 1$ ogni volta che k è il quadrato di un numero naturale, $\gamma^k = 0$ altrimenti. Il decimale $c = \gamma^0, \gamma^1\gamma^2...$ non è periodico; esso dunque rappresenta un numero *reale ma non razionale, a differenza di tutti gli elementi di S*. Ebbene, è facile verificare che $c = \sup S$.

□

Dall'esempio precedente si deduce che $\mathbf{Q}$ *non è completo.*

Esempio 2 Sia S l'insieme dei reali $\alpha^0, \alpha^1\alpha^2... < 13,47$. Poniamo γ^0 uguale al massimo dei valori che α^0 può assumere per gli elementi di S che non sono negativi: dunque, $\gamma^0 = 13$. Poniamo poi $\gamma^1 = 4 =$ massimo dei valori che può assumere α^1 al variare di $13, \alpha^1\alpha^2...$ in S; $\gamma^2 = 6 =$ massimo dei valori che può assumere α^2 al variare di $13, 4\alpha^2...$ in S; $\gamma^3 = 9 =$ massimo dei valori che può assumere α^3 al variare di $13, 46\alpha^3...$ in S; eccetera. Il decimale $c = \gamma^0, \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4... = 13,4699...$ è periodico, dunque non irrazionale. Poichè però il suo periodo è 9, c non è associato ad un numero razionale mediante l'algoritmo della divisione. Poniamo $\Lambda = \gamma^0, \gamma^1(\gamma^2 + 1) = 13,47$: si verifica subito che $\Lambda = \sup S$.

□

Dire prima che vale la prop. di Archimede per i numeri reali

6 Dimostrazione del Teorema 1 *

Supponiamo che esista un intero L con la proprietà

$$a \leq L \quad \forall a \in S.$$

Cominciamo dal caso di un insieme S che contenga almeno un elemento ≥ 0. Sia S^0 l'insieme (non vuoto) delle parti intere degli elementi ≥ 0 di S: dunque,

$$S^0 = \{m \in \mathbf{N} \bigcup \{0\} | \quad \exists\, \alpha^0, \alpha^1\alpha^2... \in S \quad \text{con } \alpha^0 = m\}.$$

S^0 è finito, in quanto i suoi elementi sono interi compresi tra 0 e L. Esiste perciò il $\max S^0$, che indichiamo con γ^0. Sia adesso S^1 l'insieme delle prime cifre decimali dei numeri di S le cui parti intere valgono γ^0: dunque,

$$S^1 = \{m \in \{0, 1, ..., 9\} | \quad \exists\, \gamma^0, \alpha^1\alpha^2... \in S \quad \text{con } \alpha^1 = m\}.$$

Anche S^1 è dotato di massimo γ^1 perchè finito. Procediamo per ricorrenza, indicando con γ^h il massimo dell'insieme finito

$$S^h = \{m \in \{0, 1, ..., 9\} | \quad \exists \gamma^0, \gamma^1\gamma^2...\gamma^{h-1}\alpha^h... \in S \quad \text{con } \alpha^h = m\}.$$

Se il numero decimale $c = \gamma^0, \gamma^1\gamma^2...\gamma^h...$ non ha periodo 9 poniamo $\Lambda = c$. Se invece $c = \gamma^0, \dot{9}$ poniamo $\Lambda = \gamma^0 + 1$. Infine, se per un $h \in \mathbf{N}$ risulta $c = \gamma^0, \gamma^1\gamma^2...\gamma^h\dot{9}$ con $\gamma^h < 9$ poniamo $\Lambda = \gamma^0, \gamma^1\gamma^2...(\gamma^h + 1)$.

Ebbene: Λ è il $\sup S$. Dimostriamolo.

Sia $a \in S$. Ovviamente, $a < \Lambda$ se $a < 0$. Sia $a = \gamma^0, \gamma^1\gamma^2...\gamma^{i-1}\alpha^i...$ con $\alpha^i < \gamma^i$ per un intero i positivo o nullo. Tanto basta, se $\Lambda = c$, a garantire che $a \leq \Lambda$ (ed anzi $a < \Lambda$). Ma lo stesso accade anche se $\Lambda = \gamma^0, \gamma^1\gamma^2...(\gamma^h + 1)$ per un intero $h \geq 0$, come si vede distinguendo i due casi $i \leq h$ ed $i > h$; per quest'ultimo si tiene conto che al posto h-esimo dello sviluppo decimale di a troviamo γ^h. Poichè nel caso $a = c$ vale banalmente l'identità $a = \Lambda$ abbiamo verificato che ogni $a \in S$ verifica $a \leq \Lambda$.

Sia $b \in \mathbf{R}$, $b < \Lambda$. Per un opportuno intero $j \geq 0$ si deve avere $b = \gamma^0, \gamma^1\gamma^2...\gamma^{j-1}\beta^j...$ con $\beta^j \neq \gamma^j$ (altrimenti b avrebbe lo sviluppo decimale di c e non potrebbe essere minore di Λ, che in in questo caso sarebbe $= c$). Non può accadere che $\beta^j > \gamma^j$: ciò è ovvio per $\Lambda = c$, e si dimostra per $\Lambda = \gamma^0, \gamma^1\gamma^2...(\gamma^h + 1)$ con h intero ≥ 0 tenendo conto che $\gamma^j = 9$ per $j > h$, che $\beta^h > \gamma^h$ implicherebbe $b \geq \Lambda$, e che $\beta^j > \gamma^j$, $j < h$, implicherebbe $b > \Lambda$. Dunque, $\beta^j < \gamma^j$: ne segue che $b < a'$ non appena $a' \in S$ è un elemento di S (certamente esistente) con sviluppo decimale dato, fino al j-esimo posto, da $\gamma^0, \gamma^1\gamma^2...\gamma^{j-1}\gamma^j$.

Passiamo ora a studiare l'eventualità che tutti gli elementi di S siano ≤ 0. Questa volta poniamo

$$S^0 = \{m \in \mathbf{Z} | \quad \exists -\alpha^0, \alpha^1\alpha^2...\alpha^{h-1}\alpha^h... \in S \quad \text{con } \alpha^0 = m\}$$

e definiamo γ^0 come il $\min S^0$. Procediamo per ricorrenza, definendo γ^h come il minimo dell'insieme

$$S^h = \{m \in \{0, 1, ..., 9\} | \quad \exists -\gamma^0, \gamma^1\gamma^2...\gamma^{h-1}\alpha^h... \in S \quad \text{con } \alpha^h = m\}.$$

Si noti che se $\gamma^h = 9$ *tutti* gli elementi di S hanno l'h-esima cifra decimale uguale a 9, per cui è impossibile che l'identità in questione valga definitivamente.

Chiamiamo c il numero reale con sviluppo decimale (necessariamente *non* di periodo 9) dato da $-\gamma^0, \gamma^1\gamma^2...\gamma^{h-1}\gamma^h...$. Ancora una volta si vede che c è il $\sup S$. Infatti ogni numero $a \in S$, se non è uguale ad c, ha sviluppo decimale $-\gamma^0, \gamma^1\gamma^2...\gamma^{h-1}\alpha^h...$ con $\alpha^h > \gamma^h$ per qualche intero $h \geq 0$. In ogni caso, $a \leq c$. Sia $b < c$. Per un opportuno intero $j \geq 0$ si deve avere $b = -\gamma^0, \gamma^1\gamma^2...\gamma^{j-1}\beta^j...$ con $\beta^j > \gamma^j$: dunque, $b < a'$ non appena $a' \in S$ è un elemento di S con sviluppo decimale dato, fino al j-esimo posto, da $-\gamma^0, \gamma^1\gamma^2...\gamma^{j-1}\gamma^j$.

Rimane da dimostrare l'enunciato che riguarda l'estremo inferiore di un insieme S inferiormente limitato. Ma per questo caso possiamo avvalerci della parte del teorema che abbiamo appena dimostrato: ci basta tener conto che l'insieme $-S$ costituito dai numeri $-a$ al variare di a in S è superiormente limitato, dunque dotato in $\mathbf{R}$ di estremo superiore, e che $-\sup(-S)$ gode delle proprietà che caratterizzano $\inf S$.

7 Densità di Q in R

Prendiamo una successione a valori *in un qualunque insieme*. Diciamo che essa gode **definitivamente** di una proprietà $\mathcal{P}$ se esiste un indice ν (dipendente da $\mathcal{P}$) tale che tutti gli elementi della successione di indice $\geq \nu$ abbiano tale proprietà.

Esempio 3 Dato comunque un reale $b > 0$ risulta definitivamente $10^{-k} < b$ (e quindi, dato comunque un reale $b' < 0$, risulta definitivamente $-10^{-k} > b'$: basta porre $b = -b'$). Qui la successione in esame è $\{10^{-k}\}$ e la proprietà è quella di essere $< b$. Verifica banale: se un termine non nullo dello sviluppo decimale di b si trova al posto k_0-esimo e k è $> k_0$, ogni numero il cui sviluppo decimale abbia il primo termine non nullo al posto k-esimo, in particolare 10^{-k}, risulta $< b$. L'indice a partire dal quale vale la proprietà, cioè $k_0 + 1$, dipende ovviamente dalla scelta di b.

$\square$

Adesso prendiamo una successione $\{a_n\}$ a valori *reali*. Diciamo che essa è **monotona** se verifica $a_n \leq a_{n+1}$ (nel qual caso specifichiamo che $\{a_n\}$ è **crescente**) oppure $a_n \geq a_{n+1}$ (nel qual caso specifichiamo che $\{a_n\}$ è **decrescente**) per ogni $n \in \mathbf{N}$. Si parla poi di successioni **definitivamente monotone** se si richiede solo che le disuguaglianze in questione valgano da un certo indice in poi, di successioni **strettamente monotone** se si richiede che le disuguaglianze valgano in senso stretto.

Esempio 4 Per $a \in \mathbf{R}$ indichiamo con r_N lo sviluppo decimale di a arrestato all'N-esimo posto. La successione $\{r_N\}$, $N = 0, 1, 2, ...$, è monotona, e per la precisione crescente se $a = \alpha^0, \alpha^1\alpha^2...\alpha^N\alpha^{N+1}...$ (e dunque $r_N = \alpha^0, \alpha^1\alpha^2...\alpha^N$), decrescente se $a = -\alpha^0, \alpha^1\alpha^2...\alpha^N\alpha^{N+1}...$ (e dunque $r_N = -\alpha^0, \alpha^1\alpha^2...\alpha^N$). Si noti che risulta definitivamente $r_N = a$ per tutti gli a che sono interi o, in generale, decimali di periodo 0. La $\{r_N + 10^{-N}\}$ è sempre crescente, la $\{r_N - 10^{-N}\}$ sempre decrescente, e ciò *indipendentemente dal segno di* a.

$\square$

Il prossimo risultato contiene la fondamentale proprietà detta di **densità di Q in R**.

Teorema 2 *Dati comunque a e $\bar{a}$ in* **R** *con $\bar{a} < a$ esiste r in* **Q** *tale che $\bar{a} < r < a$.*

Ai fini di alcune considerazioni che seguiranno ci conviene in effetti ottenere il Teorema 2 come conseguenza di un risultato un po' più specifico:

Teorema 3 *Siano $a, \bar{a}, \bar{\bar{a}}$ numeri reali, $\bar{a} < a < \bar{\bar{a}}$, e per $N = 0, 1, 2...$ sia $\{r_N\}$ lo sviluppo decimale di a arrestato all'N-esimo posto. Risulta definitivamente*

$$\bar{a} < r_N - 10^{-N} < a < r_N + 10^{-N} < \bar{\bar{a}}. \tag{20}$$

Dimostrazione La seconda e la terza disuguaglianze qui sopra sono ovvie. Sottolineiamo che è proprio perchè esse valgano in senso stretto che ad r_N sottraiamo (a sinistra) ed aggiungiamo (a destra) 10^{-N} (cf. Esempio 4).

Se $a = \alpha^0, \alpha^1\alpha^2...\alpha^N\alpha^{N+1}...$, $\bar{a}$ o è negativo, dunque $< -10^{-N} \leq r_N - 10^{-N}$ per tutti gli N sufficientemente grandi (cf. Esempio 3), oppure ha uno sviluppo decimale $\alpha^0, \alpha^1\alpha^2...\alpha^h\bar{\alpha}^{h+1}\bar{\alpha}^{h+2}...$ con $\bar{\alpha}^{h+1} < \alpha^{h+1}$. Occupiamoci di questo secondo caso. Indichiamo con N_1 un naturale $> h+1$ tale che $\bar{\alpha}^{N_1} < 9$. (Quest'ultima disuguaglianza si deve verificare per infiniti indici N_1 perchè lo sviluppo di $\bar{a}$ non può avere periodo 9.) Siccome $\bar{a}$ è $< \alpha^0, \alpha^1\alpha^2...\alpha^h\bar{\alpha}^{h+1}9...9$ (dove l'ultimo 9 occupa l'N_1-esimo posto), $\bar{a} + 1/10^{N_1}$ è $< \alpha^0, \alpha^1\alpha^2...\alpha^h(\bar{\alpha}^{h+1}+1)$, che è a sua volta $\leq \alpha^0, \alpha^1\alpha^2...\alpha^h\alpha^{h+1} \leq r_{N_1}$. D'altra parte la successione degli $r_N - 10^{-N}$ è crescente: dunque, la prima disuguaglianza della (20) è soddisfatta, nel caso $a \geq 0$, per tutti gli indici $N \geq N_1$.

Sempre nel caso $a \geq 0$ passiamo a scrivere $\bar{\bar{a}}$ come $\alpha^0, \alpha^1\alpha^2...\alpha^k\bar{\bar{\alpha}}^{k+1}...$ con $\bar{\bar{\alpha}}^{k+1} > \alpha^{k+1}$. Prendiamo un indice $N_2 > k$ tale che $\alpha^{N_2} < 9$. Allora

$$r_{N_2} + 10^{-N_2} = \alpha^0, \alpha^1\alpha^2...\alpha^k\alpha^{k+1}...(\alpha^{N_2}+1) < \bar{\bar{a}}.$$

Poichè gli $r_N + 10^{-N}$ costituiscono una successione decrescente, possiamo concludere che l'ultima disuguaglianza della (20) vale per ogni $N \geq N_2$.

Abbiamo così dimostrato che le (20) sono soddisfatte per tutti gli indici $N \geq \bar{N}$, dove $\bar{N}$ è un qualunque intero $\geq \max\{N_1, N_2\}$.

Il caso $a \leq 0$ si riconduce a quello appena studiato, poichè $-\bar{\bar{a}} < -a < -\bar{a}$.

□

8 Limiti di successioni

Come si definiscono le quattro operazioni in R? In altri termini: dati due numeri reali, diciamo $a = \alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3...\alpha^n...$ e $b = \beta^0, \beta^1\beta^2\beta^3...\beta^n...$, quale significato attribuiamo alle espressioni $a+b$, $a-b$, $a \cdot b = ab$, a/b (quest'ultima, s'intende, con $b \neq 0$)? Una "risposta" elementare è la seguente: siccome i numeri razionali $a_n = \alpha^0, \alpha^1\alpha^2\alpha^3...\alpha^n$ e $b_n = \beta^0, \beta^1\beta^2\beta^3...\beta^n$ approssimano rispettivamente a e b, i risultati delle quattro operazioni relativi ad a_n e b_n approssimano i corrispondenti risultati relativi ad a e b. Questa non è una definizione ed anzi la presuppone, ma diventa, *o quasi*, quella che finiremo per dare, se in essa la proposizione principale viene modificata così: i risultati delle quattro operazioni relativi ad a e b sono *definiti* come quei numeri che vengono approssimati dai corrispondenti risultati relativi ad a_n e b_n. Verrebbe fatto di commentare: se non è zuppa... Ebbene, non è pan bagnato, e ciò per i tre seguenti motivi.

1° Non è affatto ovvio che, siccome i numeri a_n e b_n approssimano rispettivamente a e b, debbano esistere dei numeri – quelli destinati ad essere i valori di $a+b$, eccetera – approssimati dagli $a_n + b_n$, eccetera.

2° Poichè a e b possono essere rispettivamente approssimati anche da razionali $a'_n \neq a_n$ e $b'_n \neq b_n$ sarebbe un bel guaio se i numeri approssimati dagli $a_n + b_n$, eccetera non fossero approssimati anche dagli $a'_n + b'_n$, eccetera.