Matematica II
6 febbraio 2019

1. Si discuta, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, esistenza e numero delle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} \alpha x + y = \alpha \\ x + \alpha y = \frac{1-\alpha}{2} \end{cases}$$

Soluzione.

Si tratta di un sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite. Si considera perció il determinante della matrice dei coefficienti

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 - 1$$

Il teorema di Cramer afferma che, se questo é diverso da zero, il sistema ammette una sola soluzione.

Dal momento che $\alpha^2 - 1 = 0$ per $\alpha = 1$ e per $\alpha = -1$, se $\alpha \neq \pm 1$, il sistema ammette un'unica soluzione.

Non é difficile vedere che:

nel caso in cui $\alpha = 1$, il sistema non ha soluzioni, infatti diventa

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

nel caso in cui $\alpha = -1$, il sistema ha infinite soluzioni, tutti i punti della retta $y = x - 1$ (cioé i punti $(x, x-1)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$), infatti diventa

$$\begin{cases} -x + y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

In modo piú schematico, nel caso $\alpha = \pm 1$, si puó applicare il teorema di Rouché-Capelli. In entrambi questi casi, la matrice dei coefficienti ha rango $= 1$.

Per $\alpha = 1$, la matrice completa é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, infatti

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

e quindi il sistema non ammette soluzioni.

Per $\alpha = -1$, la matrice completa é

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 1, infatti le due righe sono una l'opposta dell'altra, e quindi il sistema ammette ∞^{2-1} soluzioni: tutti i punti $(x, x-1)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

2. i) Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

ii) Si dica se la soluzione del precedente problema é convessa in un intorno di $x_0 = 0$.

Soluzione.

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea.

La teoria afferma:

- 1) che l'integrale generale ha la forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \overline{y}(x)$$

dove $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata

$$y'' - y = 0$$

e $\overline{y}(x)$ é una qualunque particolare soluzione dell'equazione completa;

2) che per trovare $y_1(x)$ e $y_2(x)$ si cercano le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

Dal momento che queste sono due, reali e distinte, $\lambda = \pm 1$, si possono scegliere

$$y_1(x) = e^x \qquad y_2(x) = e^{-x}$$

3) che $\overline{y}(x)$ si puó scegliere costante (dal momento che le funzioni costanti non sono soluzioni dell'equazione omogenea, si puó cercare della forma polinomio dello stesso grado del termine non omogeneo, che ha grado zero). Sostituendo nell'equazione $\overline{y}(x) \equiv k$, con le sue derivate, si ottiene $-k = 1$ e quindi $\overline{y}(x) = -1$.

L'integrale generale é perció

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1$$

Le derivate sono

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$$

sostituendo le condizioni iniziali, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 - 1 = 0 \\ y'(0) = c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $(c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2})$.

La soluzione del problema assegnato é

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1$$

ii) Sostituendo la soluzione nell'equazione si ottiene

$$y''(0) - y(0) = 1$$

$$y''(0) = 1$$

Dal momento che le soluzioni hanno la derivata seconda continua, per il teorema della permanenza del segno, esiste in un intorno di $x_0 = 0$ in cui $y''(x) > 0$ e quindi $y(x)$ é convessa.

3. Si verifichi che la funzione

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$$

non ha punti di estremo locale.

Soluzione.

Il dominio di f é l'insieme aperto $\mathbb{R}^2$ e la funzione é continua con le sue derivate prime. Per il teorema di Fermat, gli eventuali punti di estremo locale, che sono interni, devono essere punti stazionari (punti in cui il gradiente é il vettore nullo) .

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x - 2y = 0 \\ f_y(x, y) = -2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x = 1, y = 1)$$

Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

e quindi il punto stazionario $(1, 1)$ é di sella.

4. Si calcoli

$$\iint_D (x^2+y)\,dxdy$$

dove $D = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$

Soluzione.

$$\iint_D (x^2+y)\,dxdy = \int_0^1 (\int_0^x (x^2+y)\,dy)\,dx = \int_0^1 (\int_0^x x^2\,dy)\,dx + \int_0^1 (\int_0^x y\,dy)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^2(\int_0^x 1\,dy)\,dx + \int_0^1 (\int_0^x y\,dy)\,dx = \int_0^1 x^2(y|_0^x)\,dx + \int_0^1 (\frac{y^2}{2}|_0^x)\,dx =$$

$$\int_0^1 (x^2x + \frac{x^2}{2})\,dx = (\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6})|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

5. Si calcoli

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r$$

dove

$$\mathbf{F}(x,y) = (\frac{x^2+y^2}{x^2y}, -\frac{x^2+y^2}{xy^2})$$

e γ é il segmento di estremi $(1,1)$ $(2,1)$ orientato nel verso dell x crescenti.

Soluzione.

I metodo. Usando la definizione di lavoro.

Le equazioni parametriche della curva γ, che é un segmento poarallelo all'asse x, sono

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \end{cases} \quad t \in [1,2]$$

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 0 \end{cases}$$

Sostituendo

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r = \int_1^2 (\frac{t^2+1}{t^2}\cdot 1 - \frac{t^2+1}{t}\cdot 0)\,dt = \int_1^2 \frac{t^2+1}{t^2}\,dt = \int_1^2 (1+\frac{1}{t^2}\,dt = t|_1^2 - \frac{1}{t})|_1^2 =$$

$$(2-1) - (\frac{1}{2} - 1) = 1 + \frac{1}{2}$$

II metodo. Si cerca di capire se il campo é conservativo e, nel caso lo sia, si calcola il lavoro come differenza di potenziale nei due estremi della curva.

Ponendo
$$M(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2y} \qquad N(x,y) = -\frac{x^2+y^2}{xy^2},$$
si ha
$$M_y(x,y) = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} \qquad N_x(x,y) = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$$
e quindi il campo é irrotazionale.

$\mathbf{F}(x,y)$ é definito nel piano privato degli assi (deve essere $xy \neq 0$ e quindi sia x che y devono essere diversi da 0) che non é connesso. La curva assegnata é peró contenuta nel primo quadrante, che é una componenente semplicemente connessa del dominio di $\mathbf{F}(x,y)$. Ristretto a questa componente, il campo é conservativo. Cerchiamo un potenziale.

$$U(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int \frac{x^2+y^2}{x^2y}\,dx = \int (\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2})\,dx = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + c(y)$$

Deve risultare $U_y(x,y) = N(x,y)$ e quindi

$$-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} + c'(y) = -\frac{x^2+y^2}{xy^2}$$

Da qui segue $c'(y) = 0$, $c(y) = k$ e

$$U(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + k$$

Per calcolare la differenza di potenziale, conviene scegliere $k = 0$.

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r = U(2,1) - U(1,1) = 2 - \frac{1}{2}$$

(N.B $1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$).