Istituzioni di Matematica II
6 settembre 2018
Soluzioni

1. i) Si trovino autovalori ed autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(4-\lambda)$$

Quindi $\det(A - \lambda I) = 0$ per $\lambda = 3$ e $\lambda = 4$.

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 3$, sono le soluzioni nonnulle del sistema

$$(A - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2x + 2z \\ x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{(x, y, -x) \ : \ (x, y) \neq (0, 0)\}$$

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 4$, sono le soluzioni nonnulle del sistema

$$(A - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ 2x - y + 2z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{(0, 2z, z) \ : \ z \neq 0\}$$

2. i) Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

ii*) Indicata con $y(x)$ la soluzione del precedente problema, si calcoli $y''(0)$

Soluzione. i) L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ha $\lambda = 2$ come soluzione doppia. L'integrale generale dell'equazione omogenea

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

é quindi

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} +_2 xe^{2x}$$

Si cerca un integrale particolare dell'equazione completa della forma

$$\overline{y}(x) = x^2 ce^{2x}$$

Sostituendo nell'equazione $\overline{y}(x)$ con la sue derivate

$$\overline{y}'(x) = 2ce^{2x}(x^2 + x)$$

$$\overline{y}''(x) = 2ce^{2x}(2x^2 + 4x + 1)$$

si ottiene $2ce^{2x} = e^{2x}$ e quindi $c = \frac{1}{2}$.

L'integrale generale dell'equazione completa é quindi

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x) = c_1 e^{2x} +_2 xe^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$$

Sostituendo in $y(x)$ e

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} +_2 (2x + 1)e^{2x} + \frac{1}{2}(2x^2 + 2x)e^{2x}$$

i dati iniziali , si ottiene

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y'(0) = 2c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

La soluzione del problema dato é perció

$$y(x) = xe^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$$

ii) sostituendo i dati iniziali nell'equazione, si ottiene

$$y''(0) - 4y'(0) + 4y(0) = e^0$$

$$y''(0) - 4 = 1$$

$$y''(0) = 5$$

3. i) Si dimostri che i punti $(0,0)$ e $(-1,-1)$ sono punti critici per la funzione

$$f(x,y) = e^{(x+y)}(x^2+y^2)$$

ii) se ne studi la natura.

Soluzione. i)

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{(x+y)}(x^2+y^2+2x) \\ f_y(x,y) = e^{(x+y)}(x^2+y^2+2y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x(0,0) = 0 \\ f_y(0,0) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x(-1,-1) = 0 \\ f_y(-1,-1) = 0 \end{cases}$$

ii)

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{(x+y)}(x^2+y^2+4x+2) & e^{(x+y)}(x^2+y^2+2x+2y) \\ e^{(x+y)}(x^2+y^2+2x+2y) & e^{(x+y)}(x^2+y^2+4y+2) \end{pmatrix}$$

$$\det h(0,0) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

Il punto $(0,0)$ é quindi un punto di minimo.

$$\det h(-1,-1) = \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

Il punto $(-1,-1)$ é quindi un punto di sella.

4. i) Si calcoli

$$\int_\gamma (x+y)\, ds$$

dove γ é il sostegno della curva di equazione polare $\rho(\theta) = 1$ con $\theta \in [0,\pi]$

ii) Si calcoli

$$\int\int_D (x+y)\, dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) : y \geq 0 \quad x^2+y^2 \leq 1\}$$

Soluzione. i)

$$\underline{r}(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \sin\theta \end{cases} \qquad |\underline{r}'(\theta)| \equiv 1$$

$$\int_0^{\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta = (\sin\theta - \cos\theta)|_0^{\pi} = 2$$

ii)

$$D = \{(x,y) : y \geq 0 \quad x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(x,y) :\ -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

$$\int\int_D (x+y)\, dxdy = \int_{-1}^{1} (\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x+y)\, dy)\, dx =$$

$$\int_{-1}^{1} (xy + \frac{y^2}{2})|_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}})\, dx = \int_{-1}^{1} (x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{2})\, dx =$$

$$-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{2}{3}} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

5. i) Si calcoli

$$\int_\gamma \mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{dr}$$

dove $\mathbf{F}(x,y) = (y,x)$ e γ é la curva di equazioni $\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = t - \cos t \sin t \\ y = 4e^t \sin t \\ t \in [0,\pi] \end{cases}$

orientata nel verso delle t crescenti.

Soluzione. $\mathbf{F}$ é conservativo, infatti é irrotazionale ed é definito in $\mathbb{R}^2$.

Gli estremi della curva γ sono, nell'ordine, $(x(0) = 0, y(0) = 0)$ e $(x(\pi) = \pi, y(\pi) = 0)$.

I metodo:

$U(x,y) = xy$ é un potenziale di $\mathbf{F}$.

$$\int_\gamma \mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{dr} = U(\pi,0) - U(0,0) = 0$$

II metodo:

La curva γ_1 di equazione $\underline{r_1}(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y = 0 \\ t \in [0,\pi] \end{cases}$, orientata nel verso delle t crescenti, ha gli stessi estremi di $\underline{r}(t)$.

$$\int_\gamma \mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{dr} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{dr} = \int_0^{\pi} (0 \cdot 1 + t \cdot 0)\, dt = 0$$