Corso di laurea in Chimica Industriale
Matematica II - A.A 2017-2018
Prova scritta 20 giugno 2018

Esercizio 1 Data la metrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) se ne trovino tutti gli autovalori;
ii) si dica se $(2,1,0)$ é autovettore.
Soluzione.
i) Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Sviluppando, per esempio, rispetto alla seconda riga (conviene!), si ottiene

$$(2-\lambda)((1-\lambda)^2-4) = (2-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = (2-\lambda)(1+\lambda)(3-\lambda)$$

Perció la matrice ha tre autovalori reali distinti:

$$\lambda = 2,\ \lambda = -1, \lambda = 3$$

ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é un autovettore associato all'autovalore $\lambda = 2$.

Esercizio 2 i) Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-y}\cos x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ii) Si dimostri che in un intorno di $x_0 = 0$ la soluzione é crescente.
Soluzione.
i) Non esistono soluzioni costanti.
L'equazione é equivalente a

$$e^y y' = \cos x$$

$$e^{y(x)} = \sin x + c$$

$$y(x) = \log(\sin x + c)$$

Sostituendo il dato iniziale, si ottiene $y(0) = \log(c) = 0$, da cui segue $c = 1$. La soluzione é

$$y(x) = \log(\sin x + 1)$$

ii) Sostituendo nell'equazione il dato iniziale, si ottiene

$$y'(0) = e^0 \cos(0) = 1 > 0$$

Dal momento che $y'(x)$ é continua, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di $x_0 = 0$ in cui $y'(x)$ é positiva e quindi $y(x)$ crescente.
Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x, y) = (y - x^2)^2$$

i) se ne studi il segno;
ii) se ne abbozzino le curve di livello $f(x, y) = 0$ e $f(x, y) = 1$;
iii) se ne trovino i punti critici e li si classifichi;
iv) si scriva la derivata di f nella direzione $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ nel punto $(1, 1)$.
Soluzione.
i)

$$(y - x^2)^2 \geq 0$$

per ogni (x, y) in $\mathbb{R}^2$. $(y - x^2)^2 = 0$ per $y = x^2$.
ii) la curva di livello $f(x, y) = 0$ é la parabola $y = x^2$.
Da

$$(y - x^2)^2 = 1$$

$$(y - x^2) = \pm 1$$

segue che la curva di livello $f(x, y) = 1$ é l'unione delle due parabole $y = x^2 + 1$. e $y = x^2 - 1$.
iii) il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(y - x^2)(-2x) = 0 \\ 2(y - x^2) = 0 \end{cases}$$

ha come soluzioni tutti i punti $(x, y = x^2)$ cioé tutti i punti della parabola $y = x^2$, che abbiamo visto essere punti di minimo assoluto.
iv) Dal momento che f é di classe $\mathbb{C}^1(\mathbb{R}^2)$,

$$D_v f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = (0, 0) \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = 0$$

Esercizio 4 Dato il campo

$$\mathbf{F}(x, y) = (y + e^{(x - y^2)}, x + 1 - 2ye^{(x - y^2)})$$

i) si dimostri che é conservativo;
ii) si trovi quel potenziale $U(x, y)$ tale che $U(1, 1) = 0$.
Soluzione.
i) $\mathbf{F}(x, y)$ é definito in $\mathbb{R}^2$ che é semplicemente connesso ed é irrotazionale, infatti

$$\frac{\partial(y + e^{(x - y^2)})}{\partial y} = 1 - 2ye^{(x - y^2)} \qquad \frac{\partial(x + 1 - 2ye^{(x - y^2)})}{\partial x} = 1 - 2ye^{(x - y^2)}$$

ii)

$$U(x,y) = \int y + e^{(x-y^2)}\, dx = xy + e^{(x-y^2)} + g(y)$$

$$U_y(x,y) = x - 2ye^{(x-y^2)} + g'(y) = x + 1 - 2ye^{(x-y^2)}$$

da cui segue $g'(y) = 1$ e quindi $g(y) = y + c$

$$U(x,y) = xy + e^{(x-y^2)} + y + c$$

Imponendo la condizione $U(1,1) = 0$, si ottiene $U(1,1) = 1+1+1+c = 0$, e quindi $c = -3$.

$$U(x,y) = xy + e^{(x-y^2)} + y - 3$$

Esercizio 5 i) Si disegni l'insieme $D = \{(x,y) : 0 \le y,\ \ x^2 + y^2 - 2x \le 0\}$.
ii) si calcoli

$$\int\int_D y\, dxdy$$

Soluzione.
i)

$$x^2 + y^2 - 2x = (x-1)^2 + y^2 - 1$$

e quindi D é il semicerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1 contenuto nel semipiano $y \ge 0$. (e quindi nel primo quadrante).
ii) Primo metodo. Riduzione.

$$\int\int_D y\, dxdy = \int_0^2 (\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} y\, dy) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (y^2|_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 1 - (x-1)^2 dx =$$

$$\frac{1}{2}(x - \frac{(x-1)^3}{3})|_0^2 = \frac{2}{3}$$

Secondo metodo. In coordinate polari
a) $0 \le y$ diventa $0 \le \rho \sin\theta$, $0 \le \sin\theta$, $0 \le \theta \le \pi$,
b) $x^2 + y^2 - 2x \le 0$ diventa $\rho^2 - 2\rho\cos\theta \le 0$ e quindi $0 \le \rho \le 2\cos\theta$
Da qui segue anche
c) $\cos\theta \ge 0$ e quindi $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.
In coordinate polari D diventa l'insieme ρ-semplice

$$E = \{(\theta,\rho) :\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \qquad 0 \le \rho \le 2\cos\theta\}$$

$$\int\int_D y\, dxdy = \int\int_E \rho^2 \sin\theta\, d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2\, \mathrm{d}\,\rho) d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta\, \frac{\rho^3}{3}|_{\rho=0}^{\rho=2\cos\theta}) d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^3\theta\, d\theta =$$

$$-\frac{8}{3}\frac{\cos^4\theta}{4}|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$