Analisi Canale L-Pe
A.A. 2017/2018
Argomenti trattati a lezioni

1 settimana. 2 ore
Giovedí 22 febbraio - 2 ore.

• **Equazioni differenziali che descrivono la dinamica di popolazioni.**
Indichiamo con $y(t) \geq 0$ l'ammontare di una "popolazione" all'istante t. Si suppone che la popolazione sia di natura tale che non la si misuri "contando" il numero di individui che la compongono, ma piuttosto misurando, per esempio, lo spazio che occupa o la sua concentrazione, e che quindi la sua misura vari con continuitá e sia descritta da numeri reali e non da numeri naturali.
Si é interessati a conoscere $y(t)$ in tempi t successivi ad un certo tempo iniziale t_0, che in genere si pone uguale a 0.
Si ha quindi

$$y : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$$

i) Il modello piú semplice di evoluzione di una popolazione, é quello di *Malthus*, che suppone che ad ogni istante la velocitá con cui varia la popolazione sia proporzionale al suo ammontare, con un coefficiente di proporzionalit k, caratteristico della popolazione, che é la differenza tra il tasso di natalitá n e quello di mortalitá m. L'equazione soddisfatta da $y(t)$ é

$$y'(t) = ky(t) \tag{1}$$

dove $k = n - m$. Perció, se $n > m$, $y(t)$ cresce nel tempo, se $n < m$, $y(t)$ deresce, ed infine, se $n = m$, $y'(t) \equiv 0$, e quindi $y(t)$ si mantiene costante.
Esercizio 1.
i) Si verifichi che per ogni $c \in \mathbb{R}$, la funzione

$$y(t) = ce^{kt}$$

soddisfa l'equazione (1).
ii) Si verifichi che se $y(0) = y_0$, allora $c = y_0$.
iii) Si abbozzino i grafici dell'evoluzione della popolazione nei casi

$$k = 1,\ y(0) = 1; \qquad k = 1,\ y(0) = 2; \qquad k = 1,\ y(0) = 0; \qquad k = 2,\ y(0) = 1$$

$$k = -1,\ y(0) = 1; \qquad k = -1,\ y(0) = 2; \qquad k = -2,\ y(0) = 1$$

se ne osservi il comportamento asintotico e li si confrontino.
ii) Un modello piú articolato é quello di *Verhulst*, che tiene conto anche dell'ambiente in cui si evolve la popolazione. Infatti, se la popolazione vive in un ambiente con risorse sufficienti a sostenere al massimo una popolazione di misura $a > 0$, la velocitá con cui varia la popolazione é ancora proporzionale all'ammontare della popolazione, ma con un coefficiente di proporzionalitá

$$K = K(t) = k(a - y(t))$$

che varia nel tempo perché dipende dall'ammontare della popolazione. Se la costante caratteristica k é positiva, il tasso di crescita $K(t)$ diminuisce al crescere della popolazione, e quindi l'equazione (1) é sostituita da

$$y'(t) = k(a - y(t))y(t) \tag{2}$$

detta anche equazione logistica.
Esercizio 2.
i) Si verifichi che per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$, la funzione

$$y(t) = \frac{y_0 e^t}{1 - y^0 + y_0 e^t}$$

soddisfa l'equazione

$$y'(t) = (1 - y(t))y(t)$$

e la condizione $y(0) = y_0$
ii) Si verifichi che se $y_0 = 0$, allora $y(t) \equiv 0$ e se $y_0 = 1$, allora $y(t) \equiv 1$.
iii) Si osservi il comportamento asintotico di $y(t)$ al variare di $y_0 \geq 0$.
iv) Si verifichi che se $y_0 > 1$, allora $y(t)$ é decrescente e se $0 < y_0 < 1$, allora $y(t)$ é crescente.
v) Si studi la convessitá di $y(t)$ al variare di $0 < y_0 < 1$.
Si interpretino i risultati trovati in termini dell'evoluzione di una popolazione.

- **Altri esempi di equazioni differenziali.**

(1) e (2) sono esempi di equazioni *differenziali*, ossia di equazioni in cui l'incognita é una funzione, definita in un intervallo, su cui, tra le altre operazioni, é stata eseguita anche la *derivazione.*
Una soluzione é una funzione che, sostituita con le sue derivate nell'equazione, dá luogo ad una identitá. Risolvere vuol dire trovare tutte le soluzioni. L'insieme di tutte le soluzioni si chiama *integrale generale.*
Esercizio 3.
Si risolvano le seguenti equazioni differenziali:

$$a)\, y'(x) = 0 \qquad b)\, y'(x) = 2x + 1 \qquad c)\, y'(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$d)\, (\log|y(x)|)' = 2x + 1 \qquad e)\, (e^{y(x)})' = \sqrt{1 - x^2}$$

Soluzioni

Proof. a) le soluzioni sono tutte e, per il teorema sulla caratterizzazione delle funzioni costanti negli intervalli, solo le funzioni costanti.
b) l'insieme delle soluzioni é

$$\int 2x + 1\, dx = x^2 + x + c : \; c \in \mathbb{R}$$

c) l'insieme delle soluzioni é

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2} + c : \; c \in \mathbb{R}$$

(si é integrato per sostituzione).
d)

$$\log |y(x)| \in \int 2x + 1\, dx$$

e quindi

$$\log |y(x)| = x^2 + x + c : \; c \in \mathbb{R}$$

da cui segue

$$|y(x)| = e^{\log |y(x)|} = e^{x^2+x+c} = e^{x^2+x} e^c : \; c \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \pm e^c e^{x^2+x} = k e^{x^2+x} : \; c \in \mathbb{R}, \; k \neq 0$$

e) si risolva utilizzando lo stesso procedimento che si é usato per risolvere il punto d). □

- **Osservazioni sulla risoluzione delle equazioni nel campo reale.**

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si consideri l'equazione

$$f(x) = a \qquad a \in f[D]$$

Le soluzioni sono costituite dall'antimmagine di a, cioé dall'insieme $f^{-1}[\{a\}]$.
Se f é invertibille e $f^{-1} : f[D] \to D$ é la sua inversa, l'equazione ha l'unica soluzione

$$x = f^{-1}(a)$$

Esercizio 4.
Si risolvano le seguenti equazioni:

$$i)\; 3x = 2; \qquad\qquad ii)\; e^{3x} = 2$$

Soluzioni

Proof. i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = 3x$ é iniettiva e surriettiva e quindi invertibile; la sua inversa é $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$. L'equazione ha l'unica soluzione $x = \frac{1}{3}2$.
ii) $f(x) = e^{3x}$ é composta dalle due funzioni invertibili

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ definita da } f_1(x) = 3x \;\; e \;\; f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \text{ definita da } f_2(x) = e^x$$

le cui inverse sono

$$f_1^{-1}(x) = \frac{1}{3}x \;\; e \;\; f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ definita da } f_2^{-1}(x) = \log x$$

$f(x)$ é invertibile e da

$$f(x) = f_2(f_1(x)$$

segue che la sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é data da

$$f^{-1}(x) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(x))$$

La soluzione dell'equazione é perció $x = \frac{1}{3}(\log 2))$. □

Se f non é invertibile, ci sono varie tecniche per trovare tutti gli elementi di $f^{-1}[\{a\}]$
Esercizio 5.
Si risolvano le seguenti equazioni

$$i)\, x^2 = 4$$
$$ii)\ \log(x^2) = 1 \qquad\qquad iii)\, (\log x)^2 = 1$$

Soluzioni

Proof. i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definita da $f(x) = x^2$ non é iniettiva, ma lo é la sua restrizione $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.
l'inversa di questa restrizione é
$f^{-1}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definita da $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
Si trova quindi la soluzione $x = 2 = \sqrt{4}$.
Dalla regola dei segni, segue che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $(-x)^2 = x^2$. Da qui segue che anche $x = -2$ é soluzione dell'equazione $i)$ e che non ce ne sono altre.
ii) $f(x) = f_2(f_1(x))$ dove $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = \log x$. Perció, "ricavando" x, per passi successivi, si ottiene

$$x^2 = e^{\log(x^2)} = e^1 = e$$
$$x = \pm\sqrt{e}$$

iii) $f(x) = f_2(f_1(x))$ dove $f_1(x) = \log x$ e $f_2 = x^2$. Perció, "ricavando" x, per passi successivi, si ottiene

$$\log x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$
$$x = e^{\log x} = e^{\pm 1} = e, \frac{1}{e}$$

□

• **Metodo risolutivo per le equazioni differenziali a variabili separabili.**
Si osservi che, nonostante la natura delle "incognite" sia molto doversa, il metodo usato per risolvere d) ed e) dell'esercizio 3 é lo stesso che si é usato per risolvere le due ultime equazioni ii) e iii) dell'esercizio 5. infatti in d) esercizio 3, si ha

$$f : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$$
$$f(y(x)) = f_2(f_1(y(x))$$

dove $f_1(y(x)) = \log|y(x)|$ e $f_2(y(x)) = y'(x)$ ($f_1(y(x))$ é a sua volta composta da $g_1(y(x)) = |y(x)|$ e $g_2(y(x)) = \log(y(x)))$ e quindi f agisce nel seguente modo:

$$y(x) \to |y(x)| \to \log|y(x)| \to (\log|y(x)|)' = 2x + 1$$

g_2 é invertibile e la sua inversa é $g_2^{-1}(y(x)) = e^{y(x)}$, mentre g_2 e f_2 non sono invertibili, ma l'antimmagine di $f_2^{-1}(2x+1) = \int 2x + 1\, dx = x^2 + x + c :\ c \in \mathbb{R}$, e, per g_1, l'antimmagine di una funzione positiva $h(x)$ é $\pm h(x)$.
Quindi

$$y(x) = \pm e^{x^2+x+c} \leftarrow |y(x)| = e^{\log|y(x)|} = e^{x^2+x+c} \leftarrow \log|y(x)| = x^2+x+c = \int 2x+1\, dx \leftarrow 2x+1$$

Esercizio 6.
Si risolvano le seguenti equazioni differenziali

$$i)\,\frac{y'(x)}{y(x)} = 2x+1 \qquad\qquad ii)\,\frac{y'(x)}{1+y^2(x)} = (2x+1)$$

Soluzioni

Proof. i) Se si vogliono applicare i metodi precedenti, si deve interpretare $\frac{y'(x)}{y(x)}$ come una composizione di applicazioni sulla funzione incognita $y(x)$.
Si vede che

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = (\log|y(x)|)' \tag{3}$$

A questo punto, ci si é ricondotti al caso dell'esercizio 3, d).
La uguaglianza (3) si é trovata cercando una primitiva di $\frac{y'(x)}{y(x)}$ e quindi calcolando

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx$$

Se si integra utilizzando il metodo per sostituzione, e quindi, ponendo $y(x) = y$ e $y'(x)dx = dy$ si ha

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy_{y=y(x)}$$

L'equazione dice che tutte queste funzioni devono essere primitive anche di $2x+1$ e quindi che

$$\int \frac{1}{y}\,dy_{|y=y(x)} = \int 2x+1\,dx$$

I passaggi da fare per risolvere i) sono quindi

$$1) \qquad \int \frac{1}{y}\,dy_{|y=y(x)} = \int 2x+1\,dx$$

$$2) \qquad \log|y(x)| = x^2+x+c$$

$$3) \qquad |y(x)| = e^{x^2+x+c}$$

$$4) \qquad y(x) = \pm e^{x^2+x+c} = \pm e^c e^{x^2+x} = k e^{x^2+x}$$

dove $k = \pm e^c \neq 0$.
ii) La si risolva utilizzando il metodo usato nel punto i). $\square$

Esercizio 7.
Si risolvano le seguenti equazioni differenziali

$$i)\,y'(x) = (2x+1)y(x) \qquad\qquad ii)\,y'(x) = (2x+1)(1+y^2(x))$$

Soluzioni

Proof. i) Si osservi che la funzione costante $y(x) \equiv 0$ é soluzione, infatti anche $y'(x) \equiv 0$ e sostituendo y e la sua derivata nell'equazione si ottiene l'identitá $0 = 0$.
Se $y(x) \neq 0 \ \forall x$, l'equazione i) é equivalente a

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 2x + 1$$

le cui soluzioni abbiamo visto essere $y(x) = ke^{x^2+x}$ con $k \neq 0$. Per $k = 0$ otteniamo $y(x) \equiv 0$ e quindi

$$y(x) = ke^{x^2+x} \qquad k \in \mathbb{R} \tag{4}$$

sono tutte soluzioni.
Resta aperto il problema di capire se abbiamo trovato tutte le soluzioni.
Altre eventuali soluzioni dovrebbero essere soluzioni che si annullano in qualche punto, ma non sono la soluzione identicamente nulla. Il Teorema 1, ii), che enunceremo piú avanti, ci garantirá che non esistono soluzioni di questo tipo e che quindi (4) é l'integrale generale.
ii) Si risolva utilizzando le stesse osservazioni. □

Definizione. Equazioni differenziali a variabili separabili.
Una equazione del tipo

$$y' = f(x)g(y)$$

(é una scrittura abbreviata per $y'(x) = f(x)g(y(x))$), dove
$f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue negli intervalli (limitati o illimitati) I e J, si dice *a variabili separabili*.
Il metodo per risolvere queste equazioni é il seguente:
1) si cercano, se esistono, i numeri $c \in \mathbb{R}$, soluzioni dell'equazione numerica $g(y) = 0$.
Le funzioni costanti $y(x) \equiv c$ sono soluzioni dell'equazione.
2) si cercano le funzioni $y(x)$ che non assumono mai i valori c, risolvendo l'equazione equivalente

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Si risolve questa equazione integrando entrambi i membri in dx e utilizzando, per il primo integrale, il metodo di integrazione per sostituzione

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy_{|y=y(x)} = \int f(x)\, dx$$

Se $H(y)$ é una primitiva di $\frac{1}{g(y)}$ e $F(x)$ é una primitiva di $f(x)$. si ottiene

$$H(y(x)) = F(x) + c$$

Se H é invertibile, si ricava $y(x)$

$$y(x) = H^{-1}(H(y(x)) = H^{-1}(F(x) + c)$$

Esercizio 8
i) Si dimostri che le equazioni differenziali di Malthus e di Verhulst sono a variabili separabili e le si risolva.

ii) Si dimostri che le equazioni a),b),c) dell'esercizio 3) sono a variabili separabili.
iii) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali:

$$y' = xy \qquad y' = x(y-1) \qquad y' = (x-1)y \qquad y' = \frac{x}{y} \qquad y' = \frac{y}{x}$$

$$y' = \sqrt{1-x^2} \qquad y' = x\sqrt{1-y^2}$$

• **Il problema di Cauchy per le equazioni a variabili separabili.**
Definizione. Data l'equazione

$$y' = f(x)g(y)$$

e $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

consiste nella ricerca di una soluzione dell'equazione che passi per il punto (x_0, y_0).
Ricordiamo che le soluzione dell' equazione si pensano definite in intervalli (e non in unione di intervalli) e perció le soluzioni del problema di Cauchy sono funzioni definite nel piú grande intervallo, contenuto nel loro dominio, che contiene il punto iniziale x_0.
Teorema 1. Esistenza ed unicitá delle soluzioni del problema di Cauchy.
i)(**Esistenza locale**) Se f e g sono continue, il problema ammette almeno una soluzione, il cui dominio é un intervallo che contiene x_0, é contenuto in I, ma non é detto coincida con I.
ii) (**Esistenza e unicitá locale**) Se f é continua e g é derivabile, il problema ammette esattamente una soluzione, il cui dominio é un intervallo che contiene x_0, é contenuto in I, ma non é detto coincida con I.
ii)(**Esistenza e unicitá in grande**) Se f é continua, g é definita in tutto $\mathbb{R}$, é derivabile e la sua derivata é limitata, il problema ammette esattamente una soluzione. Il dominio della soluzione é I.
Esercizio 10
Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy e

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \sqrt{1-x^2}y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \frac{x}{y} \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Per ogni problema si dica se la soluzione é unica, si trovi il dominio delle soluzioni e si dica quale dei tre teoremi di esistenza si puó applicare.
Soluzioni

Proof. Nelle prime due equazioni $g(y) = y$. Sono qundi soddisfatte le ipotesi del teorema si esistenza ed unicitá in grande e perció il primo problema ha un unica soluzione, il cui dominio coincide con il dominio di $f(x) = x$, che é $\mathbb{R}$. Il secondo problema ha un unica soluzione, il cui dominio coincide con il dominio di $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, che é $[-1, 1]$.
Nei primi tue problemi della seconda riga $g(y) = \frac{1}{y}$. Questa funzione é definita, e derivabile, nei due intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Sono quindi soddisfatte solo le ipotesi del teorema si esistenza ed unicitá locale. Si verifichi che la soluzione del primo problema é definita in $\mathbb{R}$ mentre la soluzione del secondo, solo in una semiretta.
Nel terzo e nel quarto problema della seconda riga $g(y) = y^2$. Questa funzione é definita e derivabile in tutto $\mathbb{R}$, ma $g'(y) = 2y$ non é limitata. Si osservi che le due soluzioni non hanno lo stesso dominio.
Nell'ultimo problema $g(y) = \sqrt{y}$, che non é derivabile in $x = 0$. Si verifichi che il problema ammette piú di una soluzione. $\square$

- **Generalizzazioni.**

Definizione. Una equazione differenziale si dice del *primo ordine* se compare solo la derivata prima della funzione incognita, si dice del *secondo ordine* se compaiono le derivate della funzione incognita fino al secondo ordine, e cosí via.
Le equazione viste fino ad ora sono tutte del primo ordine.
Le seguenti equazioni sono del secondo ordine

$$y'' = 0 \qquad y'' = 2x + 1 \qquad y'' = y' \qquad y'' + 3xy' + y = e^x$$

Esercizio 9
Si risolvano le prime tre equazioni.
Definizione. Una equazione differenziale di ordine n si dice scritta *in forma normale* se é della forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ...y^{(n-1)})$$

dove $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le equazioni d) e e) dell'esercizio 3 e le equazioni dell'esercizio 6 non sono scritte in forma normale, tutte le altre equazioni che compaiono negli esercizi, sono scritte in forma normale.
Il problema di Cauchy, per un'equazione del primo ordine é

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Il problema di Cauchy, per un'equazione del secondo ordine é

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

cioé consiste nella ricerca di una soluzione dell'equazione che passi per il punto (x_0, y_0) e abbia retta tangente

$$y = y_0 + y_1(x - x_0)$$

Esercizio 11
Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = xy' \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = xy' \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

2 settimana. 2 ore

Lunedí 26 febbraio - lezioni sospese per maletmpo.

Martedí 27 febbraio - lezioni sospese per maletmpo.

Giovedí 1 marzo - 2 ore.

• **Equazioni lineari del primo ordine.**

Esercizio 1 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali, che non sono a variabili separabili.

$$i)\ x^2y' + 2xy = xe^x \qquad ii)\ y' + 2xy = x^3 \tag{5}$$

Soluzioni

Proof. i)

$$x^2y'(x) + 2xy(x) = (x^2y(x))'$$

e quindi

$$x^2y(x) \in \int xe^x\,dx = e^x(x-1) + c$$

$$y(x) = e^x(x-1)\,\frac{1}{x^2} + \frac{c}{x^2}$$

Si osservi che, per ogni $c \in \mathbb{R}$, la funzione

$$y_c(x) = \frac{c}{x^2}$$

é soluzione della seguente equazione, che si dice *omogenea*,

$$x^2y' + 2xy = 0$$

e che

$$\overline{y}(x) = e^x(x-1)\,\frac{1}{x^2}$$

é una particolare soluzione dell'equazione $5, i)$, che si dice *completa*.

ii) Per risolvere questa equazione usiamo il metodo del "*fattore integrante* (= che permette di integrare)".

Se si moltiplicano entrambi i membri dell'equazione per e^{x^2}, (dove si é scelto x^2 perché é una primitiva del coefficiente di $2x$), si ottiene

$$e^{x^2}\,(y' + 2xy) = e^{x^2}\,x^3$$

Dal momento che

$$e^{x^2}\,(y'(x) + 2xy(x)) = (e^{x^2}\,y(x))'$$

si ha

$$e^{x^2}\,y(x) \in \int e^{x^2}\,x^3\,dx = e^{x^2}\,\frac{x^2-1}{2} + c$$

da cui segue

$$y(x) = \frac{x^2-1}{2} + c\,e^{-x^2}$$

Si osservi ancora che, per ogni $c \in \mathbb{R}$, la funzione

$$y_c(x) = c\, e^{-x^2}$$

é soluzione dell'equazione omogenea

$$y' + 2xy = 0$$

e che

$$\overline{y}(x) = \frac{x^2 - 1}{2} (= e^{x^2} \frac{x^2 - 1}{2}\, e^{-x^2})$$

é una particolare soluzione dell'equazione completa $5, ii)$.

□

Non é un caso che l'integrale generale della due equazioni abbia la struttura osservata. Questa dipende dalla particolare struttura di *equazioni lineari* delle prcedenti equazioni.

• **Primissime nozioni di Algebra Lineare.**

Definizioni. Queste definizione si possono trovare nelle dispense in vendita ai Chioschi Gialli o nel volume B.P.S.: Matematica.

Questo argomento sará itrattato in modo preciso a partire dalla prossima settimana.

Per permettere agli studenti di cominciare ad esercitarsi nel risolvere le equazioni differenziali, premettiamo alcuni risultati, senza, per il momento, dimostrarli.

- Spazio vettoriale. Sottospazio vettoriale.
- Applicazione lineare tra due spazi vettoriali. Nucleo di una applicazione lineare e sua struttura di spazio vettoriale.
- Equazioni lineari omogenee e non omogenee.

Teorema sulla struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare.

Siano $L : V \to W$ una applicazione lineare tra i due spazi vettoriali V e W e $w_0 \in W$.
Siano S l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$L(v) = w_0$$

e S_0 l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$L(v) = 0$$

Allora, se $S \neq \emptyset$,

$$S = \overline{v} + S_0 (= \{\overline{v} + v_0 : v_0 \in S_0\})$$

dove $\overline{v}$ é una soluzione di $L(v) = w_0$.

Dimostrazione.

Proof. i)

$$\overline{v} + S_0 \subseteq S$$

infatti $L(\overline{v} + v_0) = L(\overline{v}) + L(v_0) = w_0 + 0 = w_0$.

ii)

$$S \subseteq \overline{v} + S_0$$

Infatti, se $\overline{\overline{v}}$ é un'altra soluzione di $L(v) = w_0$, allora

$$L(\overline{\overline{v}} - \overline{v}) = L(\overline{\overline{v}}) - L(\overline{v}) = w_0 - w_0 = 0$$

e quindi

$$\overline{\overline{v}} - \overline{v} \in S_0$$

Da qui segue

$$\overline{\overline{v}} = \overline{v} + (\overline{\overline{v}} - \overline{v}) \in \overline{v} + S_0$$

□

Esempi di spazi vettoriali.
- L"'insieme dei vettori" nel piano o nello spazio, dotato delle operazioni di addizione tra vettori (regola del parallelogramma) e di moltiplicazione per uno scalare (dilatazione, contrazione, inversione) é uno spazio vettoriale.
- $\mathbb{R}, +, \cdot$ é uno spazio vettoriale.
Si verifichi che i seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di addizione tra funzioni e di moltiplicazione per uno scalare, sono spazi vettoriali:
- $C(I)$ l'insieme di tutte le funzioni continue in un intervallo I. (Proprietá note come *algebra dei limiti*, dimostrata nel corso di Matematica 1).
- $C^1(I)$ l'insieme di tutte le funzioni con derivata continua (e quindi continue) in un intervallo I. (Proprietá note come *algebra delle derivate*, dimostrata nel corso di Matematica 1)
- $C^2(I)$ l'insieme di tutte le funzioni con derivata seconda continua (e quindi continue e derivabili con continuitá) in un intervallo I.
$C^2(I)$ é un sottospazio vettoriale di $C^1(I)$, a sua volta sottospazio di $C(I)$.
Esempi di applicazioni lineari.
Si verifichi che
- $D : C^1(I) \to C(I)$ definita da $D(y(x)) = y'(x)$ é un'applicazione lineare.(Proprietá nota come *linearitá della derivata*, dimostrata nel corso di Matematica 1).
- $I : C^1(I = [a, b]) \to \mathbb{R}$ definita da $I(y(x)) = \int_a^b y(x)\, dx$ é un'applicazione lineare. (Proprietá nota come *linearitá dell'integrale*, dimostrata nel corso di Matematica 1).
- Sia $a(x)$ una funzione continua in un intervallo I,

$$\phi_a \cdot : C(I) \to C(I)$$

definita da $\phi_a(y(x)) = a(x)y(x)$ é un'applicazione lineare.
- Siano $a(x)$ e $b(x)$ due funzioni continue in un intervallo I, l'applicazione

$$L \cdot : C^1(I) \to C(I)$$

definita da $L(y(x)) = a(x)y'(x) + b(x)y(x)$ é un'applicazione lineare.
- Le uniche applicazioni lineari di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono:
fissato $a \in \mathbb{R}$,

$$\phi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definita da $\phi_a(x) = ax$

Esempi di equazioni lineari.

1)

$$y' = 0$$

L'insieme delle soluzioni di questa equazione, cioé il nucleo della applicazione lineare

$$D : C^1(I) \to C(I)$$

dell'esempio precedente, é l'insieme di tutte le funzioni costanti. Si verifichi che questo insieme é uno spazio vettoriale.

2) Sia $f(x) \in C(I)$, l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$y' = f(x)$$

é $\int f(x)\,dx$.

Nel corso di Matematica I si é dimostrato, usando il procedimento del Teorema sulla struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare e il Teorema sulla caratterizzazione delle funzioni costanti negli intervalli, che

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$$

dove $F(x)$ é una primitiva di $f(x)$ (e cioé una soluzione dell'equazione completa) e $y(x) \equiv c$ sono tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $y' = 0$.

3) Le due equazioni dell' Esercizio 1 sono lineari e perció l'insieme delle loro soluzioni ha la struttura osservata.

• Metodi risolutivi per le equazioni lineari del primo ordine.

Data l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$y' + a(x)y = f(x) \tag{6}$$

dove $a(x)$ e $f(x)$ sono due funzioni continue in un intervalli I i metodi risolutivi visti sono:

I. Metodo del fattore integrante. Suggerito per gli esercizi.

- Si sceglie una primitiva $A(x)$ di $a(x)$,
- si moltiplicano i due membri dell'equazione per $e^{A(x)}$

$$e^{A(x)}(y'(x) + a(x)y(x)) = e^{A(x)}f(x)$$

- si osserva che

$$e^{A(x)}(y'(x) + a(x)y(x)) = (e^{A(x)}y(x))'$$

- si integrano i due membri dell'equazione (6) che, per l'osservazione fatta, é

$$(e^{A(x)}y(x))' = e^{A(x)}f(x)$$

ottenendo

$$e^{A(x)}y(x) \in \int e^{A(x)}f(x)\,dx$$

- se

$$\int e^{A(x)}f(x)\,dx = G(x) + c$$

si ha
$$e^{A(x)}y(x) = G(x) + c$$
da cui segue
$$y(x) = e^{-A(x)}G(x) + ce^{-A(x)} \tag{7}$$
II. Metodo di linearitá. Utile da capire, perché sará quello che si userá nella soluzione delle equazioni lineari del secondo ordine.
1) Si risolve l'equazione omogenea
$$y' + a(x)y = 0$$
Lo si puó fare o utilizzando il metodo precedente, ma allora conviene applicarlo direttamente all'equazione completa, o anche osservando che é a variabili separabili:
$$y' = -a(x)y$$
Questa ha come soluzioni $y(x) = ce^{-A(x)}$, dove $A'(x) = a(x)$.
2) Si cerca una soluzione particolare dell'equazione completa.
I metodi per trovare questa soluzione, saranno trattati con cura la prossima settimana, quando si risolveranno le equazioni lineari del secondo ordine. Analizziamo peró le soluzioni particolari della seconda equazioni del primo esercizio e dell'equazione generale (6):
a. Metodo della variazione delle costanti
In tutte
$$\overline{y}(x) = c(x)y_1(x)$$
dove
- $y_1(x)$ é una soluzione nonnulla della equazione omogenea associata, rispettivamente
$$y_1(x) = e^{-x^2} \qquad y_1(x) = e^{-A(x)}$$
- $c'(x) = y_1^{-1}(x)f(x)$ o, equivalentemente
$$c'(x)y_1(x) = f(x)$$
Nei casi analizzati
$$c(x) = e^{x^2}\frac{x^2-1}{2} \in \int e^{x^2}x^3\,dx \qquad c(x) = G(x) \in \int e^{A(x)}f(x)\,dx$$
b. Metodo di somiglianza.
I coefficienti e il termine noto della seconda equazione dell'esercizio 1 fanno supporre che un polinomio di secondo grado possa essere una soluzione. Poniamo
$$\overline{y}(x) = ax^2 + bx + c$$
e lo sostituiamo con la sua derivata
$$\overline{y}'(x) = 2ax + b$$
nell'equazione, ottenendo
$$2ax^3 + 2bx^2 + 2(a+b)x + b = x^3$$

Per il principio di identitá dei polinomi,

$$a = \frac{1}{2}, \;\; b = 0, \;\; c = -\frac{1}{2}$$

e quindi ritroviamo

$$\overline{y}(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$$

• **Il problema di Cauchy per le equazioni lineari del primo ordine. Teorema di esistenza ed unicitá in grande.**
Data l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$y' + a(x)y = f(x)$$

dove $a(x)$ e $f(x)$ sono due funzioni continue in un intervalli I, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{8}$$

ammette esattamente una soluzione. Questa funzione ha come dominio l'intervallo I.
Osservazioni.
I coefficienti e il termine noto di entrambe le equazioni dell'Esercizio 1. sono definite in tutto $\mathbb{R}$, ma le soluzioni della prima equazione sono definite per $x \neq 0$, e quindi, in questo caso, la soluzione del problema (8) ha dominio $]0, +\infty[$, se $x_0 > 0$ e $]-\infty, 0[$, se $x_0 < 0$.
Scrivendo l'equazione in forma "normale", e cioé dividendo per x^2, si ottiene infatti

$$y' + 2\frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}$$

• **Esercizi suggeriti.**
1) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali lineari usando il metodo del "fattore integrante".
Si risolvano le stesse equazioni risolvendo prima l'equazione omogenea associata e poi cercando una soluzione della non omogenea con il metodo della variazione delle costanti.
Nel caso dei coefficienti costanti si cerchi una soluzione della non omogenea con il metodo di somiglianza.
Si dica per quali si può applicare il metodo delle variabili separabili e lo si applichi.

$$y' - 3y = e^{-x}$$
$$y' + y \sin t = \sin 2t$$
$$y' - \frac{3\cos x}{1 + \sin x} y = 0$$

2) Si risolva la seguente equazione

$$y'' + y' = (1 - t^2)$$

2) Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 3y = e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' - \frac{3\cos x}{1+\sin x}\, y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

3 settimana. 3 ore

Lunedí 5 marzo - lezioni sospese per elezioni.

Martedí 6 marzo 1 ora.

• **Esercizio 1.** Data l'equazione

$$xy' = y \log y$$

i) la si risolva;
ii) si dica per quali coppie di numeri reali (x_0, y_0) ha senso cercare soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' = y \log y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

si dica per quali coppie si ha esistenza di soluzioni, per quali esistenza ed unicitá;
iii) senza utilizzare le soluzioni trovate, ma con il solo uso dell'identitá

$$y'(x) = \frac{1}{x} y(x) \log(y(x)) \tag{9}$$

e dei teoremi di esistenza ed unicitá, si discuta, al variare di $x_0 \neq 0$ e $y_0 > 0$, la monotonia della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} y \log y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{10}$$

iv) senza utilizzare le soluzioni trovate, ma solo osservando l'identitá (9) si verifichi che tutte le soluzioni sono convesse.

Soluzione.

i) Si osservi che le soluzioni devono soddisfare la condizione $y(x) > 0\ \forall x$, altrimenti non esiste $\log(y(x))$.
La funzione costante

$$y(x) \equiv 1$$

é soluzione, infatti

$$y'(x) \equiv 0 \qquad\qquad \log(y(x)) \equiv 0$$

Le soluzioni tali che $y(x) \neq 1\ \forall x$ e definite in intervalli che non contengono $x_0 = 0$, si trovano risolvendo l'equazione a variabili separabili

$$y' = \frac{1}{x} y \log y$$

Le soluzioni di questa equazione sono $y(x) = e^{kx} \quad k \neq 0$. Tenendo conto anche della soluzione $y(x) \equiv 1$, si trova che le soluzioni sono

$$y(x) = e^{kx} \;\; k \in \mathbb{R}$$

Tutte queste soluzioni sono definite in $\mathbb{R}$ e soddisfano l'equazione $xy' = y \log y$. (Suggerimento: si disegnino i grafici di queste funzioni).
ii) Il problema si puó porre per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni $y_0 > 0$.

Si osservi peró che i teoremi di esistenza ed unicitá delle soluzioni richiedono che l'equazione sia in forma normale

$$y' = \frac{1}{x} y \log y$$

e che quindi $x_0 \neq 0$ Dal momento che
- $f(x) = \frac{1}{x}$ é continua in $]-\infty, 0[\bigcup]0, +\infty[$,
-$g(y) = y \log y$ é derivabile in $]0, +\infty[$,
per ogni $x_0 \neq 0$ e $y_0 > 0$ esiste esattamente una soluzione del Problema di Cauchy.
Se $x_0 = 0$, non si possono applicare i teoremi. Osservando peró l'equazione, si vede che deve essere $\log(y_0) = 0$ e quindi $y_0 = 1$. Perció, se $y_0 \neq 1$ non esistono soluzioni.
Per $y_0 = 1$, si é visto che esistono le infinite soluzioni $y(x) = e^{kx}$ $k \in \mathbb{R}$.
iii) se $x_0 > 0$, la soluzione $y(x)$ é definita solo per $x > 0$.
Da

$$y'(x) = \frac{1}{x} y(x) \log(y(x))$$

segue che $y'(x)$ ha il segno di $\log(y(x))$ e quindi é positiva se $y(x) > 1$, negativa se $y(x) < 1$ e nulla se $y(x) = 1$.
Se $y_0 > 1$,

$$y'(x_0) = \frac{1}{x_0} y(x_0) \log(y(x_0)) > 0$$

$y'(x)$ é continua, e non pó cambiare segno, perché altrimenti dovrebbe annullari in un punto x_1. Per la legge di annullamento dl prodotto, da

$$0 = y'(x_1) = \frac{1}{x_1} y(x_1) \log(y(x_1))$$

segue $y(x_1) = 1$ e da qui, per l'unicitá della soluzione del problema di Cauchy, $y(x) \equiv 1$, che contraddice $y(x_0) = y_0 > 1$
In modo analogo si dimostra che
- se $x_0 > 0$, le soluzioni dei problemi (10) sono decrescenti se $y_0 < 1$;
- se $x_0 < 0$, le soluzioni dei problemi (10) sono decrescenti se $y_0 > 1$ e crescenti se $y_0 < 1$.
iv) Derivando entrambi i membri di (9), di ottiene

$$y''(x) = \frac{x(y'(x)\log(y(x)) + y'(x)) - y(x)\log(y(x))}{x^2} =$$

$$\frac{y(x)\log^2(y(x))}{x^2} > 0$$

La seconda uguaglianza si é ottenuta sostituendo $y'(x) = \frac{1}{x} y(x) \log(y(x))$.

• **Sostituzioni utili.**

Nei seguenti esercizi le equazioni non sono del tipo di quelle studiate (del primo ordine a variabili separabii o lineari), ma si possono ricondurre a queste, mediante una opportuna sostituzione della funzione incognita.

Esercizio 2.
i) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y'' = \frac{\cos x}{\sin x} y'$$

ii) si risolvano i seguenti problemi di Cauchy, si trovino i domini delle soluzioni e si giustifichi l'unicitá delle soluzioni

$$a) \begin{cases} y'' = \frac{\cos x}{\sin x} y' \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} y'' = \frac{\cos x}{\sin x} y' \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

iii) si trovino tutte le soluzioni del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (\sin x) y'' = (\cos x) y' \\ y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Soluzione.
i) Ponendo $z(x) = y'(x)$, l'equazione diventa l'equazione del primo ordine

$$z' = \frac{\cos x}{\sin x} z$$

che é lineare e anche a variabili separabili.
Dopo aver trovato tutte le soluzioni $z(x)$ di questa equazione, che sono

$$z(x) = c \sin x$$

si trovano le soluzioni della prima equazione integrando

$$y(x) = \int z(x)\, dx = c_1 \sin x + c_2$$

Esercizio 3.
Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y' - \frac{2}{x} y = 2x\sqrt{y}$$

• **Equazioni di Bernoulli.** L'equazione dell'esercizio 3 é una equazione di Bernoulli, cioé ha la forma

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}$$

Se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 1$, l'equazione é lineare, se $\alpha \neq 0, 1$, la sostituzione

$$z(x) = y^{-\alpha+1}(x)$$

la trasforma nell' equazione lineare

$$z' + (-\alpha + 1)a(x)z = b(x) \tag{11}$$

Facciamo vedere in dettaglio come si trova la (11).
Per trovare le soluzioni $y(x) \neq 0\ \forall x$, si dividono entrambi i membri dell'equazione per $y^{\alpha}(x)$, ottenendo

$$y^{-\alpha}y' + a(x)yy^{-\alpha+1} = (-\alpha+1)b(x) \tag{12}$$

Posto $z(x) = y^{-\alpha+1}(x)$, si ha

$$z'(x) = (-\alpha+1)y^{-\alpha}(x)y'(x)$$

Moltiplicando di due membri della (12) per $-\alpha+1$, si ottiene la (11).
Dopo aver trovato tutte le soluzioni $z_c(x)$ di questa equazione, si trovano le soluzioni della prima equazione ponendo

$$y_c(x) = z_c^{\frac{1}{-\alpha+1}}(x)$$

.

Se $\alpha < 0$ non ci sono altre soluzioni, se $\alpha > 0$,anche la funzione $y(x) \equiv 0$ é soluzione,

Esercizio 4.
Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y' = (\frac{y}{x})^2 + 1$$

• **Equazioni di Manfredi.** L'equazione dell'esercizio 4 é una equazione di Manfredi, cioé ha la forma

$$y' = h(\frac{y}{x})$$

La sostituzione

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

la trasforma nell'equazioni a variabili separabili

$$z' = \frac{h(z) - z}{x} \tag{13}$$

Dopo aver trovato tutte le soluzioni $z_c(x)$ di questa equazione, si trovano le soluzioni della prima equazione ponendo

$$y_c(x) = x\, z_c(x)$$

.

Facciamo vedere in dettaglio come si trova la (13).
Posto $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, si ha

$$y(x) = xz(x)$$
$$y'(x) = z(x) + xz'(x)$$

Sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$xz'(x) = h(z(x)) - z(x)$$

e quindi la (13).

Giovedí 8 marzo - 2 ore.

• **Equazioni differenziali lineari del secondo ordine.**

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{14}$$

dove $a(x), b(x), f(x)$ sono funzioni continue in un intervallo I.
Si dicono *lineari* perché

$$L : C^2(I) \to C(I)$$

definito da

$$L(y(x)) = y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x)$$

é lineare.
Valge il seguente teorema.
Teorema 1(Esistenza ed unicitá globale)
Per ogni $x_0 \in I$, y_0, $y_1 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

ammette esattamenre una soluzione. Il dominio di questa soluzione é I.
Senza dimostrazione
Struttura dell'integrale generale delle equazioni lineari.
Dalla teoria sulle equazioni lineari, vista nelle precedenti lezioni, segue che, indicato con S l'insieme delle soluzioni dell'equazione completa (14) , e con S_0 l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

si ha

$$S = \overline{y}(x) + S_0$$

dove $\overline{y}(x)$ é una soluzione dell'equazione completa.
Struttura dell'integrale generale delle equazioni lineari omogenee.
Teorema 2
i) S_0 é uno sottospazio vettoriale di $C^2(I)$;
ii) S_0 ha dimensione 2, e cioé, esistono $y_1(x)$ e $y_2(x)$ elementi di S_0
a) *linearmente indipendenti* e cioé nonnulli e tali che non esistono $c \in \mathbb{R}$ tale che $y_2(x) = cy_1(x)$,
b) che *generano* S_0 e cioé tali che

$$S_0 = \{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

iii) per ogni coppia $\overline{y}_1(x)$ e $\overline{y}_2(x)$ di elementi di S_0 linearmente indipendenti, si ha

$$S_0 = \{c_1 \overline{y}_1(x) + c_2 \overline{y}_2(x). \, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Dimostrazione (per il momento solo un "abbozzo).
i) Si dimostra utilizzando la linearitá di L;

ii) i passi della dimostrazione sono:
- Si considerano i due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Per il teorema di esistenza ed unicitá in grande, ogni problema ammette esattamente una soluzione, definita in tutto I.
- Indicate con $y_1(x)$ e $y_2(x)$ le soluzioni dei due problemi, si osserva che sono linearmente indipendenti.
Per la linearitá

$$\{c_1y_1(x) + c_2y_2(x) : \, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq S_0$$

- Dimostriamo ora l'inclusione inversa, e cioé

$$S_0 \subseteq \{c_1y_1(x) + c_2y_2(x) : \, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Sia $y(x) \in S_0$. Per il Teorema 1, il suo dominio é I e quindi possiamo calcolare y e la sua derivata in x_0.
Siano $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_1$. Consideriamo la combinazione di $y_1(x)$ e $y_2(x)$ con coefficienti y_0 e y_1

$$\underline{y}(x) = y_0y_1(x) + y_1y_2(x) \in \{c_1y_1(x) + c_2y_2(x) : \, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Si verifica facilmente che questa funzione é soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

di cui é soluzione anche $y(x)$. Quindi, per l'unicitá della soluzione,

$$y(x) = \underline{y}(x) \in \{c_1y_1(x) + c_2y_2(x) : \, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

iii) segue da ii). Lo dimostreremo, nella parte di Algebra lineare, la prossima settimana.

Da iii) del precedente Teorema segue che per trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea, é sufficiente trovarne due linearmente indipendenti.
Questo non é sempre facile. Come vedremo, lo é nel caso in cui i coefficienti dell'equazione differenziale siano costanti:

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{15}$$

Esercizi.
Esercizio 1. Si dimostri che se $f(x)$ non é identicamente nulla, S non é uno spazio

vettoriale.
Esercizio 2. Data l'equazione

$$y'' - \frac{\cos x}{\sin x} y' = 0$$

Si verifichi che $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) \equiv 1$, soddisfano le condizioni $a), b)$
Esercizio 3. Data l'equazione

$$y'' = 0$$

Si verifichi che $y_1(x) = x$ e $y_2(x) \equiv 1$, soddisfano le condizioni $a), b)$
Esercizio 4. i) Siano $\lambda\, \lambda_1\, \lambda_2\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\beta \neq 0$.
Si dimostri che
i) se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_1 x}$ sono linearmente indipendenti;
ii) $e^{\lambda x}$ e $xe^{\lambda x}$ sono linearmente indipendenti.
iii) $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $xe^{\lambda x}\sin(\beta x)$ sono linearmente indipendenti.

• Equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti.

Definizione. Equazione caratteristica.
Data l'equazione differenziale lineare omogenea

$$y''a + y' + by = 0$$

si definisce *equazione caratteristica* l'equazione algebrica ottenuta sostituendo, nell'equazione differenziale, alla derivata $i-$ma $y^{(i)}$ la potenza $i-$ma λ^i di un'incognita λ:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Teorema 3.
$y(x) = e^{\overline{\lambda}x}$ é soluzione dell'equazione omogenea (15), se e solo $\overline{\lambda}$ é soluzione dell'equazione caratteristica o, equivalentemente, *radice del polinomio caratteristico*

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

Dimostrazione Si sostituisca $y(x) = e^{\overline{\lambda}x}$ con le sue derivate nell'equazione differenziale.
Teorema 4.
Data l'equazione differenziale lineare

$$y''a + y' + by = 0$$

i) se l'equazione caratteretistica ha due soluzioni reali distinte $\lambda_1,\ \lambda_2$, allora l'integrale generale dell'equazione differenziale é

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

ii) se l'equazione caratteretistica ha una soluzione reale doppia λ, allora l'integrale generale é

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

iii) se l'equazione caratteretistica non ha soluzioni reali, e cioé se il suo discriminante

$$\Delta = a^2 - 4b < 0$$

allora l'integrale generale é

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$$

dove $\alpha = -\frac{a}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.
Dimostrazione
i) Segue dal Teorema 3 e dall'esercizio 4 i).
ii) Segue dall'esercizio 4 ii), una volta dimostrato che $y(x) = xe^{\lambda x}$ é soluzione dell'equazione differenziale.
Se λ é radice doppia del polinomio caratteristico, allora é anche radice del polinomio derivato

$$P'(\lambda) = 2\lambda + a$$

Da questo segue che, sostituendo $y(x) = xe^{\lambda x}$ con le sue derivate nell'equazione differenziale, si ottiene

$$e^{\lambda x}(x(\lambda^2 + a\lambda + b) + 2\lambda + a) = 0$$

iii) Una volta verificato che $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\sin(\beta x))$ sono soluzioni dell'equazione differenziale, si utilizza l'esercizio 4 iii).
Esercizio 5. Si risolvano le seguenti equazioni omogenee:

$$y'' - y' = 0 \qquad y'' - y = 0 \qquad y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \qquad y'' + y = 0 \qquad y'' + y' + y = 0$$

• Equazioni differenziali lineari non omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti.
Metodo di somiglianz o *ad hoc* per la ricerca di una soluzione dell'equazione completa.
Diamo un metodo per trovare una soluzione della equazione non omogenea, nel caso il termine noto abbie una forma particolare e cioé sia una funzione che abbia la stessa "natura" delle sue derivate.
Per esempio,
- se $h(x)$ é un polinomio, anche $h'(x)$ e $h''(x)$ sono polinomi;
- se $h(x) = Ae^{\alpha x}$, anche $h'(x)$ e $h''(x)$ hanno la forma $ke^{\alpha x}$;
- se $h(x) = A\cos(Bx) + C\sin(Bx)$, anche $h'(x)$ e $h''(x)$ hanno la forma $k_1\cos(Bx) + k_2\sin(Bx)$.

1 Se

$$f(x) = Q_n(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_0$$

e se:
- $b \neq 0$ si cerca una soluzione che sia un polinomio dello stesso grado:

$$\overline{y}(x) = Q_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$$

- $b = 0$ e $a \neq 0$ si cerca una soluzione della forma

$$\overline{y}(x) = xQ_n(x) = a_n x^{n+1} + a_{n-1}x^n + ... + a_0 x$$

- $b = a = 0$ si cerca una soluzione della forma

$$\overline{y}(x) = x^2 Q_n(x) = a_n x^{n+2} + a_{n-1}x^{n+1} + ... + a_0 x^2$$

2 Se
$$f(x) = Ae^{ax}$$
e se:
- α non é soluzione dell'equazione caratteristica, si cerca una soluzione della stessa forma
$$\overline{y}(x) = ke^{ax}$$
- α é radice semplice del polinomio caratteristico, si cerca una soluzione della forma
$$\overline{y}(x) = kxe^{ax}$$
(Si osservi che in questo caso $\overline{y}(x) = ke^{ax}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea.)
- α é radice doppia del polinomio caratteristico, si cerca una soluzione della forma
$$\overline{y}(x) = kx^2e^{ax}$$
(Si osservi che in questo caso $\overline{y}(x) = ke^{ax}$ e $\overline{y}(x) = kxe^{ax}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea.)
3 Se
$$f(x) = A\cos(Bx) + C\sin(Bx)$$
e se
- $a\cos(Bx) + b\sin(Bx)$ non sono soluzioni dell'equazione omogenea, si cerca una soluzione della forma
$$\overline{y}(x) = a\cos(Bx) + b\sin(Bx)$$
- $a\cos(Bx)+b\sin(Bx)$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, e cioé, se $a = 0$ e $-\Delta = \beta^2$, si cerca una soluzione della forma
$$\overline{y}(x) = x(a\cos(Bx) + b\sin(Bx))$$

Esercizio 6. Si risolvano le seguenti equazioni differenziali:
$$y'' - y = x^2 + 1 \qquad y'' - y' = x^2 + 1 \qquad y'' - 3y' + 2y = 2e^{-x} \qquad y'' - 3y' + 2y = 2e^{x}$$
$$y'' - 2y' + y = 2e^{-x} \qquad y'' - 2y' + y = 2e^{-x} \qquad y'' + y' + 2y = \operatorname{sen} x \qquad y'' + y = \cos x$$

<u>**4 settimana. 5 ore**</u>

<u>**Lunedí 12 marzo - 2 ore.**</u>

• Equazioni differenziali lineari non omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti.

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Il caso generale in cui si applica il **Metodo di somiglianza** per la ricerca di una soluzione dell'equazione completa, visto nella lezione precedente, é quello in cui il termine noto ha la forma

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + (P_2(x)\sin(\beta x)) \tag{16}$$

dove $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sono polinomi di grado, rispettivamente, n_1 e n_2.
In questo caso si cerca una soluzione della forma

$$\overline{y}(x) = e^{\alpha x}x^r(Q_1(x)\cos(\beta x) + (Q_2(x)\sin(\beta x))$$

dove $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ sono due polinimi da determinare, entrambi di grado n= $\max\{n_1, n_2\}$ e $r = 0, 1, 2$, dipende dall'essere o meno $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\sin(\beta x))$ soluzioni dell'equazione ompgenea, o meglio, come vedremo, dalla molteplicitá dei numeri (complesso) $\alpha \pm i\beta$ come radici del polinomio caratteristico.
I casi visti nell'ultima lezione sono i casi particolari in cui
$\alpha = \beta = 0$ e quindi $f(x) = P_1(x)$;
$\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $P_1(x) = A$ e quindi $f(x) = Ae^{\alpha x}$;
$\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $P_1(x) = A$, $P_2(x) = B$ e quindi $f(x) = A\cos\beta x + B\,\mathrm{sen}\,\beta x$.
Esercizio 1.
Si risolvano le seguenti equazioni differenziali

i) $y'' - 2y' + 2y = e^{-x}(x\cos x + \sin x)$ *ii)* $y'' - 2y' + 2y = e^{x}(x\cos x + \sin x)$

Soluzioni. L'equazione omogenea

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

ha soluzioni

$$y(x) = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

i) dal momento che $e^{-x}\cos(x)$ e ${}^{-x}\sin(x))$ non sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione dell'equazione della forma

$$\overline{y}(x) = e^{-x}((ax + b)\cos(x) + (cx + d)\sin(x))$$

ii) dal momento che$e^x\cos(x)$ e ${}^x\sin(x))$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione dell'equazione della forma

$$\overline{y}(x) = e^x x((ax + b)\cos(x) + (cx + d)\sin(x)) =$$
$$e^x((ax^2 + bx)\cos(x) + (cx^2 + dx)\sin(x))$$

• Equazioni differenziali lineari non necessariamente a coefficienti costanti del secondo ordine.

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

Metodo della variazione delle costanti. Questo metodo per la ricerca di una soluzione dell'equazione completa, si puó applicare sempre. Richiede peró molti conti delicati, ed é perció utile applicarlo nei casi in cui non si puó applicare il metodo di somiglianza e cioé quando il termine noto $f(x)$ non ha la forma (16) oppure quando l'equazione non é a coefficienti costanti.
I passi da eseguire sono i seguenti;
I) si trovano due soluzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linearmente indipendenti della equazione omogenea associata;
II) si cerca la soluzione della equazione completa della forma

$$\overline{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

con $c_1(x)$ e $c_2(x)$ funzioni da determinare e che soddisfino, per ogni $x \in I$ ($\mathbb{R}$ se a coefficienti costanti)

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = f(x) \end{cases}$$

Si osservi che nel caso delle equazioni lineari del primo ordine

$$y' + a(x)y = f(x)$$

l'integrale generale ha la forma

$$y(x) = c(x)e^{-A(x)} + ce^{-A(x)}$$

dove $y_1(x) = e^{-A(x)}$ é una soluzione nonnulla (e $ce^{-A(x)}$ sono tutte le soluzioni) dell'equazione omogenea associata e

$$c'(x) = f(x)e^{A(x)}$$

che é equivalente a

$$c'(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

Esercizio 2.
Si risolva la seguente equazione differenziale utilizzando il metodo della variazione delle costanti

$$y'' + y = \tan x$$

Soluzioni. L'integrale generale dell'omogenea é

$$y_(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione $i)$ della forma

$$\overline{y}(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$$

con $c_1(x)$ e $c_2(x)$ che soddisfano, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos + c_2'(x)\sin x = 0 \\ c_1'(x)(-\sin x) + c_2'(x)\cos x = \tan x \end{cases}$$

dalla prima equazione, segue

$$c_1'(x) = -c_2'(x)\tan x$$

che, sostituito nella seconda dá
$$c_2'(x) = \sin x$$
e quindi
$$c_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \frac{1}{\cos x}$$
Integrando, si ottiene
$$c_2(x) = -\cos x \qquad c_1(x) = \sin x - \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$$
e
$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{2}\cos x \log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$$
L'integrale generale dell'equazione completa é
$$y(x) = -\frac{1}{2}\cos x \log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

• **Numeri complessi.**

1) La struttura di *campo* di
$$\mathbb{C} = \{(x,y) : \, x, y \in \mathbb{R}\}, +, \cdot$$
Rappresentazione geometrica di $\mathbb{C}$. Significato geometrico dell'addizione.
Gli elementi neutri delle due operazioni: $(0,0)$ e $(1,0)$.
$(-x. - y)$ é l'opposto di (x,y) e, se $(x,y) \neq (0,0)$, il numero $(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$ é il suo reciproco.
2) $\mathbb{C}$ estende $\mathbb{R}$. Infatti
$$\mathbb{R}_{\mathbb{C}} = \{(x,0) : \, x \in \mathbb{R}\}$$
é un *sottocampo* di $\mathbb{C}$ che possiamo "identificare" con $\mathbb{R}$, perché l'applicazione
$$\phi : \, \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathbb{C}}$$
cosí definita:
$$\phi(x) = (x,0)$$
é iniettiva e surriettiva, ed inoltre
$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$$
$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$$

Scriviamo $x = (x,0)$ e osserviamo che
$$x(a,b) = (xa, xb)$$
3)
$$(0,1)^2 = (-1,0) = -1$$
indichiamo con $i = (0,1)$
4) In $\mathbb{C}$ non si puó introdurre una relazione d'ordine "compatibile" con le operazioni di campo, cioé che goda degli assiomi di cui gode $\leq$ in $\mathbb{R}$. Infatti da questi assiomi seguono le seguenti proprietá:

a) se $x > 0$, allora $-x < 0$;
b) $x^2 > 0$ per ogni $x \neq 0$.
Dal momento che $(1,0) = (1,0)^2$, se esistesse una relazione d'ordine compatibile con le operazioni, per b), anche in $\mathbb{C}$, sarebbe $(1,0) > 0$. Ma ancheil suo opposto $-(1,0)$ sarebbe positivo, perché $(-1,0) = (0,1)^2$. Questo contraddice a).
Forma algebrica dei numeri complessi.
Scriviamo

$$z = x + iy$$

infatti

$$z = (x,y) = (x,o) + (0,y) = (x,0) + (y,0)(0,1) = x + iy$$

In questo modo, trattando z come un binomio e utilizzando la proprietá di i, le operazioni diventano "naturali".
Definizioni e proprietá. $\overline{z}$, Rez, Imz e $|z|$.

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2, \qquad z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z, \qquad z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}z$$

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad\qquad \overline{z \cdot w} == \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}\,(\mathrm{Im}z = 0) \qquad\qquad \overline{z} = -z \iff \mathrm{Re}z = 0$$

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$|z+w| \leq |z| + |w| \qquad |z| \cdot |w| = |z| \cdot |w| \qquad ||z| - |w|| \leq |z - w|$$

Esercizi.
Esercizio 1. Si scrivano in forma algebrica i seguenti numeri

$$(1+i) + (-3i) \qquad (1-i)(-3i) \qquad \frac{-3i}{1+i}$$

• **Coordinate cartesiane e coordinate polari.**
Fissato nel piano un punto O, detto *origine* ed una semiretta r uscente dal punto, si considerino la famiglia delle circonferenze con centro in O e la famiglia di semirette uscenti da O.
Ogni punto P del piano diverso da O sta in un unica circonferenza e in unica semiretta. Le *coordinate polari* di P sono la coppia (ρ, θ), dove $\rho > 0$, detto *modulo* é il raggio della circonferenza, o, equivalentemente, la distanza di P da O, e θ, detto *argomento* , é l'angolo tra la semiretta fissata e la semiretta per O e per P. Si osservi che ad ogni punto restano associati un solo modulo e gli infiniti argomenti $\theta + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}$. O ha modulo 0 e come argomento tutti i numeri reali.
Se si considera nel piano un sistema di assi cartesiani, la relazione tra le coordinate cartesiane e le coordinate polari (avendo scelto l'intersezione degli assi come origine e il semiasse positivo delle x come semiretta r) é data da:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta \text{ soluzione del sistema } \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\rho} \\ \sin\theta = \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

e, viceversa,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Forma trigonometrica dei numeri complessi.
Se si considerano le coordinate polari dei punti del piano, i numeri complessi si possono scrivere nella seguente *forma trigonometrica*

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Esercizio 3.
Si dimostri che se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, allora

$$-z = \rho(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)) \qquad \overline{z} = \rho(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)) \qquad z^{-1} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

Significato geometrico di moltiplicazione e divisione.
Se si esegue la moltiplicazione tra due numeri scritti in forma trigonometrica

$$z = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad z = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

utilizzando le formule di addizione di seno e coseno, si ottiene

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

e quindi,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = z_1\frac{\overline{z_2}}{\rho_2^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

Esercizio 4.
i) Si scrivano in forma trigonometrica i seguenti numeri

$$i, \qquad -i \qquad -1 \qquad 1-i \qquad -1+1 \qquad 1+i \qquad -1-i\sqrt{3}$$

ii) Si scrivano in forma algebrica i seguenti numeri di cui sono noti il modulo ρ e l'argomento θ

$$\rho = 1,\ \theta = \frac{3\pi}{2}, \qquad \rho = 2,\ \theta = \frac{3\pi}{4}, \qquad \rho = 1,\ \theta = \frac{7\pi}{6}$$

Elevamento a potenza naturale ed intera.
Se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

$$z^{-n} = \frac{1}{\rho^n}(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta))$$

Esercizio 5.
Si scrivano in forma algebrica e trgonometrica i seguenti numeri

$$(1-i\sqrt{3})^2\, i^7 \qquad \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{(1-i)^5}$$

Martedí 13 marzo - 1 ora.

• **Estrazione di radice in $\mathbb{C}$.**

Fissato $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, si indica con

$$\sqrt[n]{w} = \{z \in \mathbb{C} : z^n = w\}$$

Sew=0, $per ogni n$ $\sqrt[n]{0} = 0$.
Se $w \neq 0$, siano

$$w = \psi(\cos\eta + i\sin\eta)$$

cerchiamo ρ, θ, tali che

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

soddisfi $z^n = w$. Da

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

segue che deve essere

$$\begin{cases} \rho^n = \psi \\ n\theta = \eta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{\psi} \\ \theta = \frac{\eta}{n} + \frac{k}{n}2\pi : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Tutte le radici $n$esime di w hanno quindi modulo $\sqrt[n]{\psi}$. Osserviamo poi che ci sono n argomenti distinti contenuti in $[0, 2\pi]$:

$$\theta_0 = \frac{\eta}{n}, \;\; \theta_1 = \frac{\eta}{n} + \frac{1}{n}2\pi, \;\; \theta_2 = \frac{\eta}{n} + \frac{2}{n}2\pi..., \;\; \theta_{n-1} = \frac{\eta}{n} + \frac{n-1}{n}2\pi$$

mentre i successivi differiscono da uno di questi per un multiplo di 2π:

$$\theta_n = \theta_0 + 2\pi, \;\; \theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi, \; ...$$

. Le radici si distribuiscono sui vertici di un poligono regolari di n lati inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\psi}$ centrata nell'origine, con il primo vertice nel punto di argomento $\frac{\eta}{n}$.
Se n é pari, é sufficiente trovare i primi $\frac{n}{2}$ argomenti, gli altri si ottengono aggiungendo a questi argomenti π, o, equivalentemente trovare le prime $\frac{n}{2}$ radici e poi considerare anche tutti gli opposti di queste.
Da quanto visto, segue che ogni equazione di secondo grado ammette soluzione.

Esercizi

Si risolvano le seguenti equazioni in$\mathbb{C}$.

$$z^2 + 2iz + 3 = 0 \qquad z^2 + 2iz + \sqrt{3}i = 0$$

• **Polinomi ed equazioni di grado n nel campo complesso.**

Radice di un polinomio.

Dato un polinomio $P(z)$ in $\mathbb{C}$, il numero complesso w si dice radice di $P(z)$, se

$$P(w) = 0$$

Divisione tra polinomi
Dati due polinomi nel campo complesso, $P(z)$ di grado n e $Q(z)$ di grado $m \leq n$, esistono due polinomi $D(z)$ di grado $n-m$ e $R(z)$ di grado $< m$, tali che

$$P(z) = Q(z)D(z) + R(z)$$

Se $R(z) \equiv 0$ si dice che $P(z)$ é divisibile per $Q(z)$.
Teorema di Ruffini.
w é radice di $P(z)$ se e solo se $P(z)$ é divisibile per $(z-w)$.
w si dice radice di molteplicitá m se $P(z)$ é divisibile per $(z-w)^m$, ma non é divisibile per $(z-w)^{m+1}$.
Teorema fondamentale dell'algebra.
Ogni polinomio $P(z)$ di grado $n \geq 1$ in $\mathbb{C}$ ammette esattamente n radici, se contate con la loro molteplicitá. In altre parole: Ogni polinomio $P(z)$ di grado $n \geq 1$ in $\mathbb{C}$ puó essere fattorizzato in n polinomi di primo grado:

$$P(z) = (z-w_1)(z-w_2)....(z-w_n)$$

• Polinomi in $\mathbb{C}$ a coefficienti reali.
Sia

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$

con $a_i \in \mathbb{C}$. Indichiamo con $\overline{P}(z)$ il polinomio i cui coefficienti sono i complessi coniugati dei coefficienti a_i

$$\overline{P}(z) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 z + \overline{a}_2 z^2 + ... + \overline{a}_n z^n$$

Se $P(z)$ é a coefficienti reali,

$$P(z) = \overline{P}(z)$$

Esercizio
Si dimostri che se w é radice di $P(z)$, allora $\overline{w}$ é radice di $\overline{P}(z)$.
Da qui segue
Teorema.
Se $P(z)$ é a coefficienti reali, e $w \in \mathbb{C}$ é radice di $P(z)$, allora anche $\overline{w}$ é radice di $P(z)$.
Esercizio.
Ogni polinomio di grado dispari a coefficienti reali ha almeno una radice reale.
Soluzione.
Per il teorema fondamentale dell'algebra

$$P(z) = (z-w_1)(z-w_2)...(z-w_n)$$

Se una radice w_i, non é reale allora una delle altre é $\overline{w_i}$. Se tutte le radici non fossero reali avremmo una fattorizzazione del polinomio in un numero pari di polinomi del primo grado.
Teorema.
Ogni polinomio $P(z)$ a coefficienti reali puó essere fattorizzato in polinomi di primo e di secondo grado a coefficienti reali.
Dimostrazione.

$$(z-w)(z-\overline{w}) = z^2 - 2\mathrm{Re}\, wz + |w|^2$$

E quindi,

$P(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_m)(z^2-2\mathrm{Re}\, w_1 z+|w_1|^2)(z^2-\mathrm{Re}\, w_2 z+|w_2|^2)...(z^2-2\mathrm{Re}\, w_h z+|w_h|^2)$

dove α_i sono le radici reali di $P(z)$ e $w_i, \overline{w_i}$ sono leradici non reali. $(m * 2h = n)$.

Esercizio.

i) Si verifichi che i é radice di

$$P(z) = z^5 - 4z^4 + 5z^3 - 4z^2 + 4z$$

ii) si trovino tutte le radici complesse di $P(z)$;

iii) si fattorizzi $P(z)$ in polinomi di primo e di secondo grado a coefficienti reali;

iv) si utilizzi iii) per calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{1}{x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 4x}\, dx$$

Giovedí 15 marzo - 2 ore.

• **Esercizi.**

Applicazione dei numeri complessi alla risoluzione delle equazioni lineari a coefficienti costanti.

i) Equazioni omogenee

$$y'' + ay' + by = 0$$

Dimostreremo la prossima settimana, utilizzando gli argomenti *derivata e serie* nel campo complesso, che se l'equazione caratteristica ha i numeri complessi coniugati $\alpha \pm i\beta$ come soluzioni, allora l'equazione differenziale ha le due soluzioni, linearmente indipendenti

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x) \;\; e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Si puó peró verificare direttamente che queste due funzioni sono soluzioni dell'equazione differenziale e sono linearmente indipendenti. ii) Equazioni non omogenee

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

dove

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$$

In questo caso si cerca una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$\overline{y}(x) = f(x) = e^{\alpha x}x^r(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))$$

dove

$$\operatorname{grad} Q_1 = \operatorname{grad} Q_2 = \max\{\operatorname{grad} Q_1, \operatorname{grad} Q_2\}$$

e

$$r = \mathrm{molteplicita\,di}\,\alpha + i\beta, \mathrm{come\,radice\,dell'\,equazione\,caratteristica}$$

Esercizio 1.

Si risolva la seguente equazione omogenea

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ ha radici $1 \pm i$.
l'equazione ha le due soluzioni $e^x \cos x$ e $e^x \sin x$, che sono linearmente indipendenti.
L'integrale generale dell'equazione é

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

Esercizio 2.

Si risolvano le seguenti equazioni

$$y'' - 2y' + y = x \qquad y'' + y' = x \qquad y'' = x$$

$$y'' + y = e^x \cos x \qquad y'' + y = \cos x$$

Soluzione.

Nelle prime tre equazioni

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$$

con $\alpha = \beta = 0$, $P_1(x) = x$ e $P_2(x) = 0$
Il numero $\alpha \pm i\beta = 0$
- non é soluzione dell'equazione caratteristica della prima equazione

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

che ha $\lambda = 1$ come soluzione di molteplicitá 2;
- é soluzione di moltelicitá 1 dell'equazione caratteristica della seconda equazione

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

che ha soluzioni $\lambda = 0, -1$;
- é soluzione di moltelicitá 2 dell'equazione caratteristica della terza equazione

$$\lambda^2 = 0$$

L'integrale generale della prima equazione é

$$y(x) = \overline{y}(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = (ax + b) + c_1 e^x + c_2 x e^x$$

L'integrale generale della seconda equazione é

$$y(x) = \overline{y}(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = x(ax + b) + c_1 + c_2 e^{-x}$$

L'integrale generale della terza equazione é

$$y(x) = \overline{y}(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = x^2(ax + b) + c_1 + c_2 x$$

dove a e b si trovano sostituendo

$$\overline{y}(x) = x^r(ax + b)$$

con le sue derivate, nell'equazione differenziale. ($r = 0$ nella prima, $r = 1$ nella seconda, $r = 2$ nella terza.)
Nella quarta e quinta equazione, l'equazione caratteristica é

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

che ha soluzioni $\pm i$.
Nella quarta equazione

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$$

con $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $P_1(x) = 1$ e $P_2(x) = 0$.
Dal momento che $1 \pm i$ non sono soluzioni dell'equazione caratteristica, l'integrale generale é

$$y(x) = \overline{y}(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = e^x(a\cos x + b\sin x) + c_1\cos x + c_2\sin x$$

Nella quinta equazione

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$$

con $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_1(x) = 1$ e $P_2(x) = 0$.
Dal momento che $\pm i$ sono soluzioni di molteplicitá 1 dell'equazione caratteristica, l'integrale generale é

$$y(x) = \overline{y}(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = x(a \cos x + b \sin x) + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

dove a e b si trovano sostituendo rispettivamente

$$\overline{y}(x) = e^x (a \cos x + b \sin x)$$

e

$$\overline{y}(x) = x(a \cos x + b \sin x)$$

con le loro derivate, nella quarta e nella quinta equazione differenziale.

Dalla linearitá segue che se

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

e

$$\overline{y}_1(x), \qquad \overline{y}_2(x)$$

sono soluzioni rispettivamente di

$$y'' + ay' + by = f_1(x) \qquad y'' + ay' + by = f_2(x)$$

allora

$$\overline{y}(x) = \overline{y}_1(x) + \overline{y}_2(x)$$

é soluzione di

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Esercizio 3.
Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x} - xe^{-x} + \sin x$$

Soluzione.
L'equazione omogenea ha equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

che ha come soluzioni 1 e 2. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Una soluzione dell'equazione completa ha la forma

$$\overline{y}(x) = axe^{2x} + (bx + c)e^{-x} + d \cos x + e \sin x$$

dove a, b, c, d, e si trovano sostituendo $\overline{y}(x)$ con le sue derivate nell'equazione.

5 settimana. 5 ore
Lunedí 19 marzo - 2 ore.

• Successioni nel campo complesso.

Limiti di successioni.

Data la successione di numeri complessi (z_n) e il numero complesso z, si dice

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z$$

se

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - z| = 0$$

Si osservi che $|z_n - z|$ é una successione di numeri reali positivi, che rappresentano la distanza di z_n da z.

Esercizio 1.

i) Si dimostri che

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} + i(2 - \frac{1}{n}) = 1 + 2i$$

e si rappresentino i numeri $z_n = 1 + \frac{1}{n} + i(2 - \frac{1}{n})$ e $z = 1 + 2i$ nel piano di Gauss.

ii) Si dimostri che se $\rho < 1$, per ogni θ fissato, la successione z^n, dove $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, converge a 0.

iii) Si dimostri che se $z_n = a_n + ib_n$ e $z = a + ib$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \iff \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = a \\ \lim_{n\to+\infty} b_n = b \end{cases}$$

• Serie nel campo complesso.

Data una successione di numeri complessi a_n, si puøconsiderare la successione delle somme parziali

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

e considerare

$$\lim_{n\to+\infty} S_n$$

Se quest'ultima successione ha limite il numero complesso S, si dice che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge a S. Valgono teoremi analoghi a quelli che valevano per le serie a termini positivi.

Teorema 1. Criterio di convergenza assoluta

Se la serie reale a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Si dice che quest'ultima serie converge assolutamente.

Teorema 2.

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora ogni suo riordinamento converge e ha

la stessa somma di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Esercizio 2.
Si dimostri che per ogni fissato θ, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

converge.
• **Serie di potenze nel campo complesso.**
Lavorando come si é fatto con le serie nel campo reale, si puó dimostrare che, data una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

questa:
- converge per $z = 0$;
- se converge per qualche $z \neq 0$, allora:
o converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$,
o esiste $R > 0$, detto *raggio di convergenza*, tale che la serie converge assolutamente per $|z| < R$ e non converge per $|z| > R$.
Esercizio 3. Si dimostri che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$,
La serie esponenziale .
Ricordiamo che nel corso di Matematica I, si é dimostrato che, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Per analogia definiamo per ogni $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

In modo analogo definiamo, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\sin z = \sum_{=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} b^{2n+1}$$

e^z gode delle stesse proprietá di cui godeva in $\mathbb{R}$:

Teorema 3.

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

e quindi, in particolare

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib}$$

Teorema 4.

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b$$

Dimostrazione.

$$e^{ib} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (ib)^n$$

Riordinando i termini di questa serie (”sommiamo prima” tutti i termini di indice pari e poi quelli di indice dispari) , otteniamo

$$e^{ib} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} b^{2k} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} b^{2k+1} =$$

$$= \cos b + i \sin b$$

dove abbiamo utilizzato il risultato, dimostrato nel corso di Matematica I,

$$\cos b = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} b^{2k} \qquad \sin b = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} b^{2k+1}$$

- **Forma di Eulero dei numeri complessi.**

Dal Teorema 4 segue la forma di Eulero dei numeri complessi

$$z = \rho e^{i\theta}$$

dove $\rho = |z|$ e $\theta = \arg(z)$.
Utilizzando le proprietá dell'esponenziale é evidente il significato geometrico della moltiplicazione.
Dai Teoremi 3 e 4 segue:
i)

$$|e^{a+ib}| = e^a \qquad \arg(e^{a+ib}) = b$$

ii)

$$\overline{e^{a+ib}} = e^{a-ib}$$

iii)

$$\frac{e^{a+ib} + e^{a-ib}}{2} = \mathrm{Re}(e^{a+ib}) = e^a \cos b \qquad \frac{e^{a+ib} - e^{a-ib}}{2i} = \mathrm{Im}(e^{a+ib}) = e^a \sin b$$

. • **Limiti, continuitá e derivabilitá nel campo complesso.**
Siano $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ e $l \in \mathbb{C}$, Si dice

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$

Se $l = f(x_0)$, f si dice continua in x_0
Ha significato il rapporto increnentale che é un numero complesso, quoziente dei due numeri complessi: incremento della funzione e incremento della variabile indipendente:

$$H(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

In analogia con il caso reale, si indica con $f'(z_0)$, se esiste finito

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

Valgono i teoremi del caso reale. In particolare, se $\lambda \in \mathbb{C}$,per ogni $z \in \mathbb{C}$

$$(e^{\lambda z})' = \lambda e^{\lambda z} \tag{17}$$

• **Equazioni differenziali nel campo complesso.**
Da (17) segue che, come nel caso reale, se $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ é soluzione dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

allora

$$f(z) = e^{\overline{\lambda} z}$$

é una funzione comlessa di variabile complessa, soluzione dell'equazione differenziale omogenea

$$y'' + ay' + by = 0$$

Dal momento che l'equazione caratteristica é a coefficienti reali, o ha soluzioni reali o ha due soluzioni complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$. In questo caso le due funzioni

$$f_1(z) = e^{(\alpha + i\beta)z} = e^{\alpha z} e^{i\beta)z} = e^{\alpha z}(\cos(\beta z) + i \sin(\beta z))$$

$$f_2(z) = e^{(\alpha - i\beta)z} = e^{\alpha z} e^{-i\beta)z} = e^{\alpha z}(\cos(\beta z) - i \sin(\beta z))$$

sono soluzioni complesse di variabile complessa dell'equazione.
Dalla linearitá segue che anche le loro combinazioni lineari sono soluzioni. In particolare sono soluzioni

$$y_1(z) = \frac{f_1(z) + f_2(z)}{2} = e^{\alpha z} \cos(\beta z), \qquad y_2(z) = \frac{f_1(z) - f_2(z)}{2i} = e^{\alpha z} \sin(\beta z)$$

Considerando solo $z = x \in \mathbb{R}$, si ottengono le due soluzioni reali, di variabile reale

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \qquad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

• **Spazi vettoriali.** (Dispense ai chioschi gialli cap.8: § 1.1 e § 3.1)
Definizione di spazio vettoriale.

Esempi di spazi vettoriali.
1) I vettori nel piano e nello spazio. Operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare con i vettori.
Se si fissa un punto O e si considera, per ogni vettore il rappresentane $\overrightarrow{OP}$, applicato in O, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra i vettori e i punti P
Se nel piano é stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane, con origine nel punto O, cé una corrispondenza biunivoca tra i vettori del piano e $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, le operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare, si traducono in operazioni sulle coppie ordinate di numeri reali.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Se nello spazio é stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane, con origine nel punto O, cé una corrispondenza biunivoca tra i vettori dello spazio e $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Come nel piano, le operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare, si traducono in operazioni fatte "componente per componente", sulle terne ordinate di numeri reali.
2) Per analogia, fissato $n \in \mathbb{N}$, si definisce lo spazio vettoriale

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

con le operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare definite

$$(x_1, x_1, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
$$\alpha(x_1, x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_1, ..., \alpha x_n))$$

3) Lo spazio vettoriale P_n dei polinomi di grado minore o uguale a n con le solite operazioni si somma tra polinomi e moltiplicazione per uno scalare.
4) Gli spazi $C(I), C^1(I), C^2(I)$.

Martedí 20 marzo - 1 ora. (Dispense ai chioschi gialli cap.8: §1.1;§ 3.1)

• **Combinazioni lineari. Vettori linearmente indipendenti e vettori linearmente dipendenti.**

Definizioni.

Esercizio 1.

Si dimostri che due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se sono "paralleli", cioé se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$, tale che uno dei due vettori v é $v = \alpha u$, dove u é il secondo vettore.

• **Sottospazio vettoriale.**

Definizione.

Esecizio 2. Si dimostri che

i)

$$W = \{(0,0)\}$$

é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$;

ii) Fissato $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \neq (0,0)$

$$W = \{\alpha(a,b);\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. La rappresentazione geometrica di questo spazio é la retta per l'origine e per $P = (a,b)$.

iii)

$$D = \{(x,y) :\, x^2 + y^2 = 1\} \qquad D = \{(x, ax+b) :\, x \in \mathbb{R},\, b \neq 0\}$$

non sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$.

Esecizio 3. Si dimostri che

i)

$$W = \{(0,0,0)\}$$

é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;

ii) Fissato $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

$$W = \{\alpha(a,b,c);\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. La rappresentazione geometrica di questo spazio é la retta per l'origine e per $P = (a,b,c)$.

ii) Fissato (a,b,c), $(d,e,f) \in \mathbb{R}^3$, entrambi $\neq (0,0,0)$,

$$W = \{\alpha(a,b,c) + \beta(d,e,f);\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. La rappresentazione geometrica di questo spazio é li piano che contiene l'origine e i due punti $P = (a,b,c)$, $Q = (d,e,f)$.

Esercizio 4.

Si dimostri che tre vettori sono linearmente dipendenti se e solo se sono "complanari", cioé se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tali che uno dei tre vettori w é $w = \alpha u + \beta v$, dove u, v sono gli altri due vettori.

Esercizio 5.

Si dimostri che dati n vettori $v_1, v_2, ..., v_n$ in uno spazio vettoriale V, il sottoinsieme

$$< v_1, v_2, ..., v_n >= \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n :\, a_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

é uno sottospazio vettoriale che si dice *generato* da $v_1, v_2, ..., v_n$.

Se

$$V =< v_1, v_2, ..., v_n >$$

per ogni $v \in V$ esista *almeno* una n-upla $a_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tale che

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

Esercizio 6.
i) Si dimostri che

$$\mathbb{R}^2 =< (1,0), (01) >$$

$$\mathbb{R}^2 =< (1,0), (01), (1,1) >$$

$$\mathbb{R}^3 =< (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) >$$

$$< (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0) >\subset \mathbb{R}^3 \ (< (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0) >\neq \mathbb{R}^3)$$

$$< (1,0,0), (0,1,0) >\subset \mathbb{R}^3 \ (< (1,0,0), (0,1,0) >\neq \mathbb{R}^3)$$

ii) si dimostri che per ogni $v \in \mathbb{R}^2$:
esiste esattamente una coppia di numeri reale (α, β) tale che

$$v = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$$

esistono infinite terne di numeri reale (α, β, γ) tale che

$$v = \alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,1)$$

• **Base.**
Una base di uno spazio vettoriale V é un insieme di vettori $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$
- linearmente indipendenti,
- che generano V e cioé tali che $V =< v_1, v_2, ..., v_n >$.

Teorema 1.
Se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é una base di V, allora, per ogni $v \in V$ esiste esattamente una n-upla $a_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tale che

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

e, viceversa,
se per ogni $v \in V$, esiste esattamente una n-upla $a_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tale che

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n,$$

allora $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é una base di V.
I numeri α_i si dicono *componenti scalari* del vettore v rispetto alla base $\{v_1.v_2, ..., v_n\}$.
Da qui segue che, in uno spazio V di dimensione n, una volta che si sia fissata una base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, l'applicazione

$$f : V \to \mathbb{R}^n$$

definita da

$$f(v) = (\, a_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

dove $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$, é una corrispondenza biunivoca, e quindi ogni vettore é perfettamente individuato dall'n-upla $a_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ delle sue componenti scalari e possiamo quindi scrivere

$$v = (\, a_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \qquad \text{o} \qquad v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Quando scriviamo, senza precisare la base fissata:
- $v \in \mathbb{R}^2$ $v = (x, y)$, pensiamo di aver fissato in $\mathbb{R}^2$ la base *canonica* $i = (1, 0)$, $j = (0, 1)$;
- $v \in \mathbb{R}^3$ $v = (x, y, z)$, pensiamo di aver fissato in $\mathbb{R}^3$ la base *canonica* $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$;
- $v \in \mathbb{R}^n$ $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$, pensiamo di aver fissato in $\mathbb{R}^n$ la base *canonica* $(i_1, i_2, ..., i_n)$, dove i_h é l'n-upla che ha tutti 0 ad eccezione che nell'h-mo posto, in cui ha 1.

Teorema 2.
Se V ha una base di n elementi, allora:
i) se $m > n$, ogni m vettori $u_1, u_2, ..., u_m \in V$ sono linearmente dipendenti;
ii) se $m < n$, per ogni m vettori $< u_1, u_2, ..., u_m > \neq V$.
iii) da i) e ii) segue, che ogni base é costituita da n vettori.
iv) se $u_1, u_2, ..., u_n \in V$ sono linearmente indipendenti, allora generano V, e quindi sono una base di V;
v) se $u_1, u_2, ..., u_n \in V$ generano V, allora sono linearmente indipendenti, e quindi sono una base di V.

• **Dimensione.**
Se V ha una (e quindi tutte) base costituita di n elementi, si dice che V ha dimensione n.
Esercizio 6. Si dimostri che lo spazio vettoriale P_n dei polinomi di grado minore o uguale a n ha dimensione $n + 1$.
Esercizio 7. Utilizzando la iv) del precedente Teorema 2, si puó completare la dimostrazione del Teorema 2 di Giovedí 8 marzo (mancava il punto iii)) e giustificare quindi il fatto che l'integrale generale di

$$y'' + ay' + by = 0$$

é

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

dove
i)

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

se l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

ha le due soluzioni reali λ_1, λ_2;
ii)

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \qquad y_2(x) = xe^{\lambda x}$$

se l'equazione caratteristica ha la sola soluzione reale λ (il polinomio caratteristico ha la radice doppia λ);
iii)

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

se l'equazione caratteristica ha le soluzioni complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.
Infatti,
- si é dimostrato che, nei diversi casi, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni (e quindi sono elementi dello spazio vettoriale S_0),
- nell'Esercizio 4 di Giovedí 8 marzo si é dimostrato che

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

sono linearmente indipendenti, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \qquad y_2(x) = xe^{\lambda x}$$

sono linearmente indipendenti;

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

sono linearmente indipendenti.
Suggerimento.
Per verificare che due funzioni derivabili $y_1(x), y_2(x)$ sono linearmente indipendenti si puó procedere nel seguente modo:
Si suppone che una loro combinazione lineare $y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ sia identicamente nulla,

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \equiv 0$$

allora anche la sua derivata é identicamente nulla

$$y'(x) = \alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x) \equiv 0$$

Si fissa un punto x_0 in cui si conoscono i valori delle due funzioni e delle loro derivate e si verifica che il sistema

$$\begin{cases} \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) = 0 \\ \alpha y_1'(x_0) + \beta y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

ammette solo la soluzione $\alpha = \beta = 0$.

<u>**Giovedí 22 marzo - 2 ore.**</u> (Dispense ai chioschi gialli cap.8: §1.1 e §3.1; §3.4)

• Cambiamento di base e quindi di componenti scalari.

Esercizio 1.

Si dimostri che $\{v_1 = (1,1),\ v_2 = (-1,1)\}$ é una base di $\mathbb{R}^2$ e si trovino le componenti scalari del vettore $v = (a,b) = a\underline{i} + b\underline{j}$ rispetto a questa base.

Soluzione

Le componenti sono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$(a,b) = xv_1 + yv_2 = x(1,1) + y(-1,1) = (x-y, x+y)$$

cioé (x,y) é soluzione del sistema

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + y = b \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$x = \frac{a+b}{2},\ y = \frac{b-a}{2}$$

Le componenti scalari rispetto alla nuova base di:
$i = (1,0)$ sono $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, cioé

$$i = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$$

quelle di $j = (0,1)$ sono $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, cioé

$$j = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$$

e quelle di $v_1 = (1,1)$ sono, ovviamente, $1, 0$.

Esercizio 2.

Si dimostri che $\{v_1 = (1,1),\ v_2 = (-1,0)\}$ é una base di $\mathbb{R}^2$ e si trovino le componenti scalari del vettore $v = (a,b) = a\underline{i} + b\underline{j}$ rispetto a questa base.

• Trasformazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita.

Definizione di trasformazione lineare.

Esempi di trasformazioni lineari si sono visti Giovedí 1 marzo. Ora ci concentriamo sulle trsformazioni tra spazi di dimensione finita.

Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita. Sia $\mathrm{Dim}V = n$ e $\mathrm{Dim}W = m$. Siano $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base di V e $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ una base di W.
Allora ogni elemento $v \in V$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

puó essere "identificato" con con l'n-upla

$$v = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

e ogni elemento $w \in W$

$$w = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_n w_n$$

puó essere "identificato" con con l'm-upla

$$w = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$$

Sia
$$L:\, V\to W$$
una trasformazione lineare, allora ogni elemento $v\in V$,
$$v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...+\alpha_n v_n$$
ha immagine
$$L(v)=\alpha_1 L(v_1)+\alpha_2 L(v_2)+...+\alpha_n L(v_n)$$
e quindi:
per conoscrere come agisce L su un qualunque elemento, é sufficiente conoscere gli n elementi di W
$$L(v_1), L(v_2), ..., L(v_n)$$
Questi sono elementi di W, su cui é fissata la base $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ e quindi ognuno di loro ha la forma
$$L(v_i)=\beta_{1\,i}w_1+\beta_{2\,i}w_2+...+\beta_{m\,i}w_m$$
ed é "identificato dall'm-upla (che sará conveniente scrivere in forma di colonna)
$$L(v_i)=\begin{pmatrix}\beta_{1\,i}\\ \beta_{2\,i}\\ .\\ .\\ \beta_{m\,i}\end{pmatrix}$$
Vedremo che, dal punto di vista operativo, sará utile considerare la *matrice a* m *righe e* n *colonne* che si ottiene "accostando" queste m-uple colonna
$$A=\begin{pmatrix}L(v_1) & L(v_2) & ... & L(v_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_{1\,1} & \beta_{1\,2} & ... & \beta_{1\,n}\\ \beta_{2\,1} & \beta_{2\,2} & ... & \beta_{2\,n}\\ . & . & ... & .\\ . & . & ... & .\\ . & . & ... & .\\ \beta_{m\,1} & \beta_{m\,2} & ... & \beta_{m\,n}\end{pmatrix}$$
Esempi.
I primi due esempi sono di trasformazioni linereari
$$L:\,\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
(in entrambi gli spazi si pensa fissata la base canonica $\{i=(0,1),\ j=(1,0)\}$).
1) La trasformazione lineare tale che
$$L(1,0)=(1,1),\qquad L(0,1)=(-1,1)$$
manda il vettore $v=(x,y)$ nel vettore
$$L(v)=x(1,1)+y(-1,1)=(x-y,x+y)$$
E quindi, per esempio
$$L(1,1)=(0,2)$$

In questo caso la matrice A é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Significato geometrico di questa trasformazione.
Si osservi che

$$|L(v)| = \sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}|v|$$

Se si pensa (x, y) come il numero complesso $x + iy$ e $L(x, y) = (x - y) + i(x + y)$, si vede che

$$((x-y) + i(x+y) = (x, y)(1+1)$$

L agisce quindi sul generico vettore v come una rotazione di un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{4}$ e una "dilatazione" di ampiezza $\sqrt{2}$.
2) La trasformazione lineare tale che

$$L(i) = L(1, 0) = (1, 1), \qquad L(j) = L(0, 1) = (-1, 0)$$

manda il vettore $v = (x, y)$ nel vettore

$$L(x, y) = x(1, 1) + y(-1, 0) = (x - y, x)$$

In questo caso la matrice A é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che questa trasformazione non agisce come una rotazione, né modifica la lunghezza di tutti i vettori nello stesso modo.
3) Sia

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

la trasformazione lineare tale che

$$L(i) = L(1, 0) = (1, 0, 1), \qquad L(j) = L(0, 1) = (1, 1, 0)$$

Questa trasformazione manda il vettore $v = (x, y)$ nel vettore

$$L(v) = x(1, 0, 1) + y(1, 1, 0) = (x + y, y, x)$$

In questo caso la matrice A é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Sia

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

la trasformazione lineare tale che

$$L(i) = L(1, 0, 0) = (1, 1), \qquad L(j) = L(0, 1, 0) = (1, 2), \qquad L(k) = L(0, 0, 1) = (1, 0)$$

Questa trasformazione manda il vettore $v = (x, y, z)$ nel vettore

$$L(v) = x(1, 1) + y(1, 2) + z(1, 0) == (x + y + z, x + 2y)$$

In questo caso la matrice A é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.
Si consideri l'applicazione

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$L(x, y, z) = (x - 2y + z, 3x + y - z, 4x - y)$$

i) si dimostri che é lineare;
ii) si trovino

$$L(i), L(j), L(k)$$

iii) si scriva la matrice A di questa trasformazione.
Esercizio 3.
Si fissi in $\mathbb{R}^2$ la base $\{v_1 = (2, 2),\ v_2 = (1, -1)\}$ e si scriva la matrice $\tilde{A}$ per la trasformazione dell'esempio 1) rispetto a questa base.
Soluzione.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} L(v_1) & L(v_2) \end{pmatrix}$$

dove

$$L(v_1) = \begin{pmatrix} \beta_{1\,1} \\ \beta_{2\,1} \end{pmatrix} \qquad L(v_2) = \begin{pmatrix} \beta_{1\,2} \\ \beta_{2\,2} \end{pmatrix}$$

e $\beta_{i\,j}$ sono le componenti scalari rispetto alla base $\{v_1,\ v_2\}$

$$L(v_1) = \beta_{1\,1} v_1 + \beta_{2\,1} v_2 \qquad L(v_2) = \beta_{1\,2} v_1 + \beta_{2\,2} v_2$$

I passo. Scriviamo (x, y) per $xi + yj$

$$L(x, y) = x(1, 1) + y(-1, 1) = (x - y, x + y)$$

perció

$$L(v_1) = L(2, 2) = (0, 4) \qquad L(v_2) = L(1, -1) = (2, 0)$$

$0, 4$ sono le componenti scalari di $L(v_1)$ rispetto alla base $\{i, j\}$ e $2, 0$ sono le componenti scalari di $L(v_2)$ rispetto alla base $\{i, j\}$.
II passo. Dobbiamo ora scrivere le componenti scalari di $(0, 4)$ e $(2, 0)$ rispetto alla nuova base v_1, v_2.
Le componenti scalari di (a, b) rispetto alla nuova base v_1, v_2 si ottengono

$$(a, b) = x(2, 2) + y(1, -1) = (2x + y, 2x - y)$$

sono quindi le soluzioni di

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ 2x - y = b \end{cases}$$

$$x = \frac{a + b}{4},\ y = \frac{a - b}{2}$$

Quindi, rispetto alla nuova base

$$L(v_1) = v_1 - 2v_2 \qquad L(v_2) = \frac{1}{2}v_1 + v_2$$

e la matrice cercata é

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

• **Immagine e nucleo di una trasformazione lineare**
Definizione di immagine di una trasformazione lineare.
Teorema 1.
Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita. Sia Dim$V = n$ e Dim$W = m$ e sia $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base di V.
L'immagine della trasformazione lineare

$$L : V \to W$$

é

$$\mathrm{Im}\,(L) = \{w \in W : \exists v \in V \; L(v) = w\}$$

É facile dimostrare che $\mathrm{Im}\,(L)$ é il sottospazio di W generato da $L(v_1), L(v_2), ..., L(v_n)$

$$\mathrm{Im}\,(L) =< L(v_1), L(v_2), ..., L(v_n) >$$

La dimensione di $\mathrm{Im}\,(L)$ non puó quindi essere maggiore né di n, né di m ed é uguale al numero massimo di colonne linearmente indipendenti della matrice A.
Definizione di nucleo di una trasformazione lineare.
Teorema 2.
Il nucleo di L é un sottospazio vettoriale di V.
• **Esercizi.**
Esercizio 4. Per ognuno degli Esempi 1)-4) si trovino immagine e nucleo della trasformazione lineare e si dica qual'é la loro dimensione.
Esercizio 5. Si trovino immagine e nucleo della trasformazione lineare dell'Esercizio 2.

(La parte di Algebra lineare svolta finora si trova nelle dispense ai chioschi gialli nei cap.8:
§1.1: Operazioni fondamentali sui vettori; vettori nel piano, vettori nello spazio tridimensionale. Combinazioni lineari di vettori. Vettori linearmente indipendenti. (Per il momento si tralasciano il §1.2 e tutto il § 3.) Si suggeriscono gli esercizi 1. 2. 6. di pgg. 382, 383.
§3.1: Vettori n-dimensionali, lo spazio $\mathbb{R}^n$. Spazi vettoriali astratti. Indipendenza lineare, base e dimensione. Spazi di funzioni. (Per il momento si tralasciano i §3.2, 3.3).
§3.4. Il concetto di linearitá. Si suggeriscono gli esercizi. 20, 21, 23, 24 di pgg. 401,402. La lettura dell'esempio 4.3 di pg. 407 e degli esempi 4.4, 4.5, 4.6 di pg. 411.

6 settimana. 3 ore

Lunedí 26 marzo - 2 ore.

• **Matrici**

Abbiamo visto come, dati due spazi V e W di dimensione finita, rispettivamente n e m, una volta si siano fissate nei due spazi le basi $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$, i vettori $v \in V$ e $w \in W$ possano essere identificati rispettivamente con l'n-upla e l'm-upla delle loro componenti scalari rispetto alle due basi

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

Giovedí 22 marzo, abbiamo anche visto come, data una applicazione lineare

$$L : V \to W$$

all'applicazione L resti associata la "tabella" di numeri

$$A = \begin{pmatrix} L(v_1) & L(v_2) & ... & L(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{1\,1} & \beta_{1\,2} & ... & \beta_{1\,n} \\ \beta_{2\,1} & \beta_{2\,2} & ... & \beta_{2\,n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ \beta_{m\,1} & \beta_{m\,2} & ... & \beta_{m\,n} \end{pmatrix}$$

Sia le n-uple, m-uple che la tabella, sono esempi di *matrici.*
Introduciamo ora dello operazioni tra matrici, (e quindi tra i numeri che le compongono) che, come vedremo, "rappresentano bene" le operazioni con le applicazioni lineari.

Definizioni.

Matrici a m righe e n colonne (di tipo $m \times n$). Matrici (vettori) riga e matrici (vettori) colonna. Matrici quadrate, diagonale di una matrice quadrata, matrici triangolari alte e basse, matrici diagonali. Matrice trasposta. Matrici simmetriche.

• **Operazioni con le matrici I: Somma e prodotto per uno scalare.**

Definizione di **somma** di due matrici dello stesso tipo $m \times n$ e sue proprietá.
Definizione di **prodotto di una matrice per uno scalare** e sue proprietá.

Teorema 1.

$M_{m \times n}$, l'insieme delle matrici dello stesso tipo $m \times n$ é uno spazio vettoriale di dimensione mn.

Esempi ed esercizi.

Si osservi che, se alle trasformazioni lineari

$$L_1 : V \to W, \qquad L_2 : V \to W$$

sono associate rispettivamente le matrici

$$A_1, \qquad A_2,$$

allora alla trasformazione lineare

$$L = L_1 + L_2 : V \to W,$$

resta associata la matrice

$$A_1 + A_2$$

e, se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora alla trasformazione lineare

$$\alpha L_1 : V \to W,$$

resta associata la matrice

$$\alpha A_1$$

• **Operazioni con le matrici II: Prodotto righe per colonne di due matrici** *conformabili*

- prodotto di una matrice riga $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ per una matrice $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$;

- prodotto di una matrice A $m \times n$ per una matrice B $n \times q$.

Esercizio 1.
Dopo aver verificato che le coppie ordinate di matrici A_i, B_i sono conformabili, si calcolino le tre matrici prodotto $C_i = A_i \cdot B_i$ $i = 1, 2, 3$, dove
i)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

iii)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Valgono le proprietá associativa e distributiva.

Osservazione 1. Da qui segue che se A é una matrice di tipo $m \times n$ e B, B_1, B_2 sono matrici colonna di tipo $n \times 1$(identificate con vettori $\in \mathbb{R}^n$)

$$A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$$

dove $A \cdot (B_1 + B_2)$, $A \cdot B_1$, $A \cdot B_2$ sono vettori in $\mathbb{R}^m$ (matrici colonna di tipo $m \times 1$) .
Vale anche la proprietá

$$A \cdot (\alpha\, B) = \alpha\, A \cdot B$$

e quindi, identificando le matrici colonna a n righe con i vettori di $\mathbb{R}^n$ e quelle a l'applicazione

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Defínta da

$$L(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

é lineare.
Non vale la proprietá commutativa.
Esempi
Si considerino le matrici A_i, B_i dell'esercizio 1,
1) Si puó fare $A_3 \cdot B_3$, ma non si puó fare $B_3 \cdot A_3$;
2) $A_1 \cdot B_1$ é una matrice 1×1, mentre $B_1 \cdot A_1 = A_2 \cdot B_2$ é una matrice 3×3
3) Anche nel caso in cui A e B siano due matrici quadrate $n \times n$, e quindi $A \cdot B$ e $B \cdot A$ siano $n \times n$, puó essere

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 18 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 23 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.
Sia A una matrice diagonale $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0. & ... & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & ... & 0 \\ & & & . \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & . & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

e siano

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & ... & c_n \end{pmatrix}$$

allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} b_1 \\ \alpha_{22} b_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{22} b_n \end{pmatrix} \qquad C \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} c_1 & \alpha_{22} c_2 & ... & \alpha_{nn} c_n \end{pmatrix}$$

Quindi, moltiplicare un vettore colonna (riga) per uno scalare equivale a moltiplicarlo a sinistra (a destra) per la matrice diagonale che ha tutti gli elementi della diagonale uguali allo scalare

$$\alpha \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0. & ... & 0 \\ 0 & \alpha & ... & 0 \\ & & & . \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & . & ... & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{22} b_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & ... & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & ... & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0. & ... & 0 \\ 0 & \alpha & ... & 0 \\ & & & . \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & . & ... & \alpha \end{pmatrix}$$

La matrice identitá.

Indichiamo con I_n la matrice diagonale $n \times n$ che ha 1 su tutti gli elmenti della diagonale

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0. & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ & & & . \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & . & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Per ogni A per cui si puó eseguire $I_n \cdot A$, risulta

$$I_n \cdot A = A$$

Per ogni A per cui si puó eseguire $A \cdot I_n$, risulta

$$A \cdot I_n = A$$

- **Matrici quadrate.**

L'insieme $M_{n\times n}$ delle matrici quadrate $n \times n$, é uno spazio vettoriale su cui é definita anche una operazione di moltiplicazione, che gode delle proprietá associativa e distributiva, ma non di quella commutativa.
Esiste l'elemento I_n, che soddisfa, per ogni matrice quadrata A $n \times n$,

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$$

e che perció chiamiamo *identitá*.
Piú in generale, le matrici diagonali di tipo $n \times n$ commutano con tutte le matrici $n \times n$.
Non tutte le matrici quadrate diverse dalla matrice nulla sono dotate di inversa.
Esempi
1) Si verifichi che se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diciamo che B é la matrice inversa di A e la indichiamo con A^{-1}.
2) Si dimostri che se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

non esistono matrici B tali che

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

né tali che

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Domani vedremo una proprietá che caratterizza le matrici invertibili.

- **Teorema di rappresentazione** .

Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione rispettivamente n e m e

$$L : V \to W$$

una trasformazione lineare.
Fissate nei due spazi le basi $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$, esiste un'unica matrice A che *rappresenta* L, nel senso che se

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \ \text{ e } \ L(v) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_m w_m$$

allora

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

La matrice é

$$A = \begin{pmatrix} \beta_{1\,1} & \beta_{1\,2} & ... & \beta_{1\,n} \\ \beta_{2\,1} & \beta_{2\,2} & ... & \beta_{2\,n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ \beta_{m\,1} & \beta_{m\,2} & ... & \beta_{m\,n} \end{pmatrix}$$

dove $L(v_i) = \beta_{1i}w_1 + \beta_{2i}w_2 + ... + \beta_{mi}w_m$.

Esercizio 3.
i) Sia

$$Id_V : V \to V$$

l'applicazione lineare identitá: per ogni $v \in V$: $Id_V(v) = v$
Fissata una qualunque base in V, la matrice che rappresenta L, é I_n.
ii) Sia U uno spazio vettoriale di dimensione q e sia $\{u_1, u_2, ..., u_q\}$ una base di U. Siano

$$L_1 : V \to W \qquad L_2 : W \to U$$

due trasformazioni lineari, rappresentate, una volta fissate le basi

$$\{v_1, v_2, ..., v_n\}, \ \{w_1, w_2, ..., w_m\}, \ \{u_1, u_2, ..., u_q\},$$

rispettivamente dalle matrici $m \times n$ e $q \times m$

$$A_1 \qquad A_2.$$

Allora la trasformazione lineare

$$L = L_2 \circ L_1 : V \to U$$

é rappresentata dalla matrice $q \times n$

$$A_2 \cdot A_1.$$

Esercizio 4.
Si utilizzi il teorema di rappresentazione per dimostrare che:
se L é l'applicazione lineare dell'esempio 1) di giovedí 22 marzo

$$L(x, y) = (x - y, x + y)$$

se L é l'applicazione lineare dell'esempio 2) di giovedí 22 marzo

$$L(x, y) = (x - y, x)$$

se L é l'applicazione lineare dell'esempio 3) di giovedí 22 marzo

$$L(x, y) = (x + y, y, x)$$

se L é l'applicazione lineare dell'esempio 4) di giovedí 22 marzo

$$L(x, y) = (x + y + 2z, x + 2y)$$

Martedí 27 marzo - 1 ora.

• **Determinante** .

Solo per le matrici **QUADRATE** A

Definizione di determinante di A

$\det A = |A| \in \mathbb{R}$ é il numero cosí definito

$$\det A = \sum_{P \in \{\text{permutazioni di } \{1,2,...,n\}\}} (-1)^{\sigma(P)} a_{1P(1)} a_{2P(2)} ... a_{nP(n)}$$

dove $\sigma(P)$ é il numero degli "scambi" di P.
Scriveremo anche $|A|$ per $\det A$.

Come si calcola il Determinante di A

- se $n = 1$ e $A = (a)$,

$$|A| = a$$

- se $n = 2$ e $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- supponendo di saper calcolare il determinante delle matrici $(n-1) \times (n-1)$, vediamo come si calcole $|A|$ per le matrici $n \times n$.

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definizioni.

1) **Minore complementare** di un elemento a_{ij} é il detrminante $|M_{ij}|$ della matrice $(n-1) \times (n-1)$, M_{ij} che si ottiene dalla matrice A cancellando la i-ma riga e la j-ma colonna

2) **Complemento algebrico** di un elemento a_{ij} é $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$

Il determinante di A si puó ottenere "sviluppando" secondo una qualunque riga o una qualunque colonna: per ogni i e $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Sviluppando rispetto alla i-ma riga, si ottiene

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

Sviluppando rispetto alla j-ma colonna, si ottiene

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

Da qui segue che

$$\det A = \det A^T$$

Esercizio 1. Si calcoli il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sviluppando rispetto
- alla prima riga;
- alla prima colonna;
- alla terza riga.

Osservazione 1.
Se A é una matrice triangolare, alta o bassa, o diagonale, il determinande di A é il prodotto degli elementi della diagonale:

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Per calcolare il determinante di una matrice di tipo molto alto, converrá quindi cercare di trasformarla in una matrice triangolare o diagonale, con lo stesso determinante. A questo scopo si utilizzano le proprietá elementari dei determinanti (Teorema 8.6).pgg.415-417.
Osservazione 2. Se A é una matrice 2×2,
$|A| = 0$ se e solo se le colonne di A sono linearmente dipendenti.
e quindi
$|A| \neq 0$ se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti.
Questo é vero per ogni n:
Teorema 1. Se A é una matrice quadrata $n \times n$,
$|A| = 0$ se e solo se le colonne (o, equivalentemente, le righe) di A sono linearmente dipendenti.
e quindi
$|A| \neq 0$ se e solo se le colonne (o, equivalentemente, le righe) di A sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2. Si dimostri che i tre vettori

$$v_1 = (1,4,0),\ v_2 = (2,5,1),\ v_3 = (3,6,-1)$$

Sono una base di $\mathbb{R}^3$
Teorema 2: Caratterizzazione delle matrici invertibili.
i) Una matrice quadrata A ammette inversa A^{-1} se e solo se $|A| \neq 0$.
ii) Sia

$$L : V \to V$$

una trasformazione lineare.
Fissate una base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, sia A la matrice che rappresenta L

$$L \text{ e}' \text{ invertibile.} \iff |A| \neq 0$$

Esercizio 3.
i) Sia

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

l'applicazione lineare tale che

$$L(i) = (1, 4, 0),\ L(j) = (2, 5, 1),\ L(k) = (3, 6, -1)$$

Si dimostri che L é invertibile.
ii) Sia

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

l'applicazione lineare tale che

$$L(i) = (1, 4, 0),\ L(j) = (2, 5, 1),\ L(k) = (3, 9, 1)$$

Si dimostri che esistono $w = (a, b, c)$ tali che l'equazione $L(v) = w$ non ammette soluzione. Si dia un esempio di w per cui l'equazione ha soluzioni ed un esempio di w per cui non ha soluzioni.
Soluzione.
i) I tre vettori

$$L(i) = (1, 4, 0),\ L(j) = (2, 5, 1),\ L(k) = (3, 6, -1)$$

sono linearmente indipendenti, infatti il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

é $|A| = 9 \neq 0$. Per il Teorema 2, L é quindi invertibie.
ii) I tre vettori

$$L(i) = (1, 4, 0),\ L(j) = (2, 5, 1),\ L(k) = (3, 9, 1)$$

sono linearmente dipendenti, infatti il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é $|A| = 0$. Quindi $\mathrm{Im}\,(L) =< L(i), L(j), L(k) > \neq \mathbb{R}^3$.
Si osservi che la terza colonna é somma delle prime 2, e quindi

$$\mathrm{Im}\,(L) =< L(i), L(j) >$$

L'equazione ha soluzione per ogni $w \in \mathrm{Im}\,(L)$ e quindi della forma

$$w = \alpha(1, 4, 0) + \beta(2, 5, 1) = (\alpha + 2\beta, 4\alpha + 5\beta, \beta) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

non ha soluzione se w non ha questa forma, per esempio per

$$w = (3, 9, 2)$$

(Gli argomenti trattati questa settimana sono contenuti nelle dispense Cap.8, § 4. MATRICI E TRASFORMAZIONI LINEARI : § § L'algebra delle matrici: 4.1, Rappresentazione matriciale delle trasformazioni lineari: 4.2, Determinante: 4.3. Si suggerisce la lettura del Teorema 8.6: Proprietá elementari del determinante e del Teorema 8.7 di Binet. Tralasciare, per il momento: Prodotto vettoriale e prodotto misto.) Si suggeriscono gli esercizi 28 a pg. 424 e 35 pg 426.

7 settimana. 2 ore

Giovedí 5 aprile - 2 ore.

• Proprietá del determinante.

Proprietá elementari del determinante : Teorema 8.6 delle dispense.

Osservazione. Da queste proprietá segue che se le colonne della matrice A sono lnearmente dipendenti, allora $|A| = 0$. Come avevamo detto, vale anche il viceversa.

Si osservi che le proprietá del determinante non si riferiscono alle operazioni tra matrici.

Il determinante e le operazioni tra le matrici

$$D: \, M_{n\times n} \to R$$

definita da

$$D(A) = |A|$$

non é lineare. Infatti, in generale,

$$|A+B| \neq |A| + |B| \qquad |\alpha A| \neq \alpha |A|$$

Valgono invece le seguenti uguaglianze:

se A é una matrice di tipo $n \times n$,

$$|\alpha A| = \alpha^n |A|$$

Teorema di Binet.

$$|AB| = |A||B|$$

Esercizio 1.

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Senza calcolarlo, ma usando le proprietá del determinante, dimostrare che $|A| = 0$.

Esercizio 2.

Dimostrare che se A é triangolare, allora

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Esercizio 3.

Si utilizzino le proprietá del determinante per trasformare la matrice A in una matrice B triangolare alta, con lo stesso determinante di A, nei casi

i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzioni.
Ci sono molti modi, noi, agiremo solo sulle righe.
i) se aggiungiamo alla seconda riga di A la prima moltiplicata per -1, il determinante della nuova matrice non cambia, e la nuova matrice é triangolare alta, infatti otteniamo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 - 3 \cdot 1 & 4 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ii) se aggiungiamo alla terza riga la prima moltiplicata per -5, il determinante non cambia. La nuova matrice é

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 - 5 \cdot 1 & 1 - 5 \cdot 2 & 0 - 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -9 & -15 \end{pmatrix}$$

Se alla terza riga di questa matrice aggiungiamo la seconda moltiplicata per -9, il determinante non cambia, la nuova matrice é triangolare

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix}$$

i) e ii) corrispondono a sommare alla terza riga la combinazione lineare delle prime due

$$-5 \cdot 1^a - 9 \cdot 2^a$$

• Matrice inversa.
Abbiamo visto che una matrice $A = (a_{ij})$ é invertibile se e solo se $|A| \neq 0$.
La matrice inversa ha la forma

$$A^{-1} = \left(A_{ij}\right)^T$$

dove A_{ij} é il complemento algebrico di a_{ij}.
Esercizio 4.
Dopo aver dimostrato che sono invertibili, trovare le matrici inverse delle due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Si dimostri che, dalla forma di A^{-1} segue che, date le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

se $|A| \neq 0|$, allora

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

dove

$$c_j = \frac{|B_j|}{|A|}$$

e

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B_2 \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e, in generale,
B_j si ottiene dalla matrice A sostituendo la j-ma colonna con la colonna dei termini noti

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Soluzione
Da

$$|B_j| = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$$

segue

$$c_j = \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{A_{kj}}{|A|} = \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj} = \frac{|B_j|}{|A|}$$

• **Sistemi di n equazioni in n incognite, I parte: caso della matrice dei coefficienti con determinante $\neq 0$.**
Il sistema di n equazioni lineari in n incognite

$$(18) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

puó essere scritto come un' equazione matriciale

$$A \cdot X = B \tag{19}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Definizioni. Soluzione, risolvere.
Teorema di Cramer. Con dimostrazione.
Esercizio 6.
Si risolva il sistema

$$\begin{cases} 3x + y + 5z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

• **Sistemi di m equazioni in n incognite e sistemi di n equazioni in n incognite, II parte: caso della matrice dei coefficienti con determinante $= 0$.**
Definizione.
Rango o caratteristica di una matrice é il numero massimo di colonne linearmente indipendenti.
Come si trova il rango di una matrice.
Il rango di una matrice é rappresentato dal numero r tale che:
- da a si puó estrarre un minore $r \times r$ diverso da 0;
- ogni minore $r + 1 \times r + 1$ estratto da A é uguale a 0.
É ovvio che se la matrice é di tipo $m \times n$, il rango r deve essere
$r \leq n$, perché la matrice ha n colonne e
$r \leq m$, perché le colonne sono vettori di $\mathbb{R}^m$.
Se A é una matrice quadrata $n \times n$ e $|A| \neq 0$, il rango di A é n.
Esercizio 7.
Si trovi il rango delle seguenti matrici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Applicazioni ai sistemi di equazioni lineari.

Come nel caso $n \times n$, anche il sistema di m equazioni lineari in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{20}$$

si puó interpretare come un'unica equazione matriciale

$$A \cdot X = B \tag{21}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

Teorema di Rouchet-Capelli. Prima parte.
Il sistema (20) ha soluzioni se e solo se il vettore

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

appartiene all'immagine dell'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ \text{ definta da } L(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \tag{22}$$

e cioé allo spazio generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ..... \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ .... \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ..... \\ aa_{mn} \end{pmatrix}$$

e quindi se la matrice A e la matrice

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ . & . & ... & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso rango.

Esercizio 8.

Si dica quali tra i seguenti sistemi ammettono soluzioni.

$$i) \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \qquad ii) \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 4x + 6y + 10z = 0 \end{cases} \qquad iii) \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 4x + 6y + 10z = 2 \end{cases}$$

Soluzioni .

In questi casi il rango di A e quello di C sono al massimo 2.
Conviene partire da A, perché, se il rango di A é 2, anche il rango di C, che non puó essere minore del rango di A, é $= 2$. Quindi, calcolando un solo determinante, si puó affermare che il sistema ammette soluzioni.
i) Il rango di A é 2 e quindi Il sistema ammette soluzioni.
ii) e iii) il rango di A é 1, in ii) il rango di C é 2 e quindi non ci sono soluzioni, in iii) anche il rango di C é 1 (si osservi che la seconda riga di C é un multiplo della prima e quindi anche tutti i minori 2×2 estratti da C sono nulli). Il sistema ammette soluzioni.

Esercizio 9.

Si dica quali tra i seguenti sistemi ammettono soluzioni.

$$i) \begin{cases} x + 3y + 5z = 2 \\ 5y + 6z = 1 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases} \qquad ii) \begin{cases} x + 3y + 5z = 2 \\ 5y + 6z = 1 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Soluzioni .

In entrambi i casi $|A| = 0$, non si puó quindi applicare il teorema di Cramer.
Il rango di $|A| = 2$, in i) il rango di $C = 3$. Il sistema non ammette soluzioni.
In ii) il rango di C é ancora 2. Il sistema ammette soluzioni.

Esercizio 10 .

Si dica quali tra i seguenti sistemi ammettono soluzioni.

$$i) \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - y = 1 \\ 5x + y = 0 \end{cases} \qquad ii) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 2 \\ 5x + y = 6 \end{cases}$$

Soluzioni .

In questi casi il rango di A é al massimo 2, mentre quello di C puó essere 3.
Conviene quindi partire da C, perché, se il rango di C é 3, senza ulteriori conti, si puó affermare che il sistema non ammette soluzioni.
i)$|C| \neq 0$, quindi il rango di $C = 3$. Il sistema non ammette soluzioni.

ii) $|C| = 0$, quindi il rango di $C < 3$. Il rango di $A = 2$ e quindi anche il rango di C, che non puó essere minore del rango di A é $= 2$. Il sistema ammette soluzioni.