Compito di Fisica Generale II del 4 settembre 2018

Prof. S. Caprara

Esercizio 1.

Le armature di un condensatore piano, ciascuna di superficie S, giacciono sui piani $z = 0$ e $z = d$ (con $d > 0$) nel sistema di riferimento adottato e sono poste, rispettivamente, a potenziale $V(z = 0) = V_0$ e $V(z = d) = V_d$. Tra le armature del condensatore è presente un dielettrico non omogeneo, la cui costante dielettrica relativa varia secondo la legge

$$\epsilon_r(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{16z}{25d}}}, \qquad \text{per } 0 \leq z \leq d.$$

1. Si determinino il potenziale elettrostatico $V(z)$ e il campo elettrostatico $\boldsymbol{E}(z)$ nella regione di spazio compresa tra le armature del condensatore. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{z}}$ il versore dell'asse z.

2. Si determinino le cariche sulle due armature del condensatore, Q_0 e Q_d, e la sua capacità C.

3. Si determinino le cariche di polarizzazione del dielettrico, sulle due superfici a contatto con le armature del condensatore, $\sigma_{0,pol}$ e $\sigma_{d,pol}$, e nel volume, $\rho_{pol}(z)$.

Esercizio 2.

È assegnato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxyz. Sul piano xy giace una spira piana di superficie S e resistenza elettrica R, nella quale è inserito un condensatore di capacità C in serie alla resistenza. Il condensatore è inizialmente scarico. All'istante $t = 0$ viene acceso un campo d'induzione magnetica uniforme, perpendicolare al piano xy, la cui componente z varia nel tempo secondo la legge

$$B_z(t) = \gamma t^2 (t - T)^2, \qquad \text{per } 0 \leq t \leq T,$$

e $B_z(t) = 0$, per $t > T$, dove γ e T sono costanti dimensionali. Si adotti il verso di percorrenza della spira coerente con la normale $\hat{\boldsymbol{z}}$ (versore dell'asse z). Si ponga $\tau \equiv RC$.

1. Si determini la forza elettromotrice f indotta nella spira per $t > 0$.

2. Si determini la carica $q(t)$ presente sulle armature del condensatore per $t > 0$. Si determini quindi il valore di $q(t = T)$.

3. Si determini l'intensità $i(t)$ della corrente che scorre nella spira per $t > 0$.

Soluzione del compito per l'appello straordinario di Fisica Generale II del 19 aprile 2018
Prof. S. Caprara

Esercizio 1.

1. Il potenziale elettrostatico tra le armature del condensatore, $V(z)$, soddisfa l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\epsilon_r(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z)\right]=0.$$

Integrando una prima volta si trova

$$\epsilon_r(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z)=A,$$

dove la costante A è da determinare imponendo le condizioni al bordo. Integrando ancora, si ha

$$V(z)=V_0+A\int_0^z\frac{1}{\epsilon_r(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta=V_0+\frac{25Ad}{24}\left[1-\left(1-\frac{16z}{25d}\right)^{3/2}\right],$$

dove si è fissata una costante d'integrazione imponendo $V(z=0)=V_0$. Imponendo ora $V(z=d)=V_d$ si trova $A=\frac{60}{49}\frac{(V_d-V_0)}{d}$ e quindi

$$V(z)=V_0+\frac{125}{98}(V_d-V_0)\left[1-\left(1-\frac{16z}{25d}\right)^{3/2}\right],\qquad \text{per } 0\le z\le d.$$

Il campo elettrico è $\boldsymbol{E}(z)=E_z(z)\,\hat{\boldsymbol{z}}$, con

$$E_z(z)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z)=-\frac{60}{49}\frac{(V_d-V_0)}{d}\sqrt{1-\frac{16z}{25d}},\qquad \text{per } 0\le z\le d.$$

2. Il vettore di spostamento dielettrico è $\boldsymbol{D}(z)=D_z(z)\,\hat{\boldsymbol{z}}$ con

$$D_z(z)=\epsilon_0\epsilon_r(z)E_z(z)=-\frac{60}{49}\frac{(V_d-V_0)\epsilon_0}{d}.$$

Per il teorema di Coulomb

$$Q_0=D_z(z=0)S=-\frac{60}{49}\frac{(V_d-V_0)\epsilon_0 S}{d},\qquad Q_d=-D_z(z=d)S=\frac{60}{49}\frac{(V_d-V_0)\epsilon_0 S}{d}.$$

Allora

$$C=\frac{Q_d}{V_d-V_0}=\frac{60}{49}\frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

3. La polarizzazione del dielettrico è $\boldsymbol{P}(z)=P_z(z)\,\hat{\boldsymbol{z}}$, con

$$P_z(z)=\left[1-\frac{1}{\epsilon_r(z)}\right]D_z(z)=-\frac{60}{49}\left[1-\sqrt{1-\frac{16z}{25d}}\right]\frac{(V_d-V_0)\epsilon_0}{d},\qquad \text{per } 0\le z\le d.$$

Allora

$$\sigma_{0,pol}=-P_z(z=0)=0,\qquad \sigma_{d,pol}=P_z(z=d)=-\frac{24}{49}\frac{(V_d-V_0)\epsilon_0}{d};$$

$$\rho_{pol}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}P_z(z)=\frac{96}{245}\frac{(V_d-V_0)\epsilon_0}{d^2}\left(1-\frac{16z}{25d}\right)^{-1/2},\qquad \text{per } 0\le z\le d.$$

Esercizio 2.

1. Il flusso del campo d'induzione magnetica concatenato con la spira vale $\Phi = B_z S = \gamma S t^2 (t-T)^2$, per $0 \le t \le T$ e 0 per $t > T$. Allora, la forza elettromotrice indotta è $f = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = -2\gamma S t(t-T)(2t-T)$, per $0 \le t \le T$ e 0 per $t > T$.

2. L'equazione del circuito per $0 \le t \le T$ è

$$f - \frac{q}{C} - R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}q = -\frac{2\gamma S}{R}(2t^3 - 3Tt^2 + T^2 t)$$

con la condizione iniziale $q(t=0) = 0$. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $q_{omo} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, con A costante arbitraria. Una soluzione particolare dell'equazione è della forma $q_{part} = at^3 + bt^2 + ct + d$, e sostituendo nell'equazione si trova $a = -2\gamma SC$, $b = 6\gamma SC(T+\tau)$, $c = -4\gamma SC(T^2 + 3T\tau + 3\tau^2)$, $d = 4\gamma SC(T^2\tau + 3T\tau^2 + 3\tau^3)$. Imponendo la condizione iniziale per la soluzione generale $q = q_{omo} + q_{part}$, si trova $A = -d$, per cui

$$q(t) = 2\gamma SC\left[2(T^2\tau + 3T\tau^2 + 3\tau^3)\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) - t^3 + 3(T+\tau)t^2 - 2(T^2 + 3T\tau + 3\tau^2)t\right], \qquad \text{per } 0 \le t \le T.$$

Si ha quindi

$$q(t=T) = 2\gamma SC\left[2(T^2\tau + 3T\tau^2 + 3\tau^3)\left(1 - \mathrm{e}^{-T/\tau}\right) - 3T^2\tau - 6T\tau^2\right].$$

Per $t > T$ si ha $f = 0$ e l'equazione del circuito diventa omogenea. Allora $q(t) = A_1 \mathrm{e}^{-t/\tau}$, con la costante A_1 tale da garantire la continuità della soluzione per $t = T$,

$$A_1 = \mathrm{e}^{T/\tau} q(t=T) = 2\gamma SC\mathrm{e}^{T/\tau}\left[2(T^2\tau + 3T\tau^2 + 3\tau^3)\left(1 - \mathrm{e}^{-T/\tau}\right) - 3T^2\tau - 6T\tau^2\right].$$

Quindi

$$q(t) = 2\gamma SC\left[2(T^2\tau + 3T\tau^2 + 3\tau^3)\left(1 - \mathrm{e}^{-T/\tau}\right) - 3T^2\tau - 6T\tau^2\right]\mathrm{e}^{-(t-T)/\tau}, \qquad \text{per } t > T.$$

3. L'intensità della corrente cercata è

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 2\gamma SC\left[2(T^2 + 3T\tau + 3\tau^2)\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right) - 3t^2 + 6(T+\tau)t\right], \qquad \text{per } 0 \le t \le T,$$

e

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 2\gamma SC\left[2(T^2 + 3T\tau + 3\tau^2)\left(\mathrm{e}^{-T/\tau} - 1\right) + 3T^2 + 6T\tau\right]\mathrm{e}^{-(t-T)/\tau} \qquad \text{per } t > T.$$

È facile verificare che la corrente è continua per $t = T$.