**Compito di Fisica Generale II del 10 luglio 2018**
**Prof. S. Caprara**

**Esercizio 1.** È assegnato un riferimento cartesiano ortogonale O$xyz$, in una regione di spazio in cui è presente il potenziale elettrostatico

$$V(x) = \frac{V_0 a^2}{x^2 + a^2},$$

dipendente dalla sola variabile $x$, con $a > 0$ e $V_0$ parametri dimensionali.

1. Si determini in tutto lo spazio il campo elettrostatico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ associato al potenziale assegnato, indicando con $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ i versori degli assi cartesiani.

2. Si determini la distribuzione di carica $\rho(\boldsymbol{r})$ che genera il potenziale assegnato. Assumendo che sul piano O$yz$ tale distribuzione occupi una regione di area $S$ grande ma finita, si determini la carica totale $Q_{tot}$ ad essa associata.

3. Si determini il valore massimo dell'intensità del campo elettrico $|\boldsymbol{E}|$ e il luogo dei punti dello spazio in corrispondenza dei quali tale massimo è raggiunto.

**Esercizio 2.** Una spira circolare di raggio $a$, resistenza elettrica $R$ e autoinduttanza $L$ è posta sul piano O$xy$ del sistema di riferimento cartesiano ortogonale adottato, di modo che il suo centro coincide con l'origine O. All'istante $t = 0$ nella spira non circola corrente e viene acceso un campo d'induzione magnetica

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \gamma \sqrt{x^2 + y^2} \left(1 - \mathrm{e}^{-t/T}\right) \hat{\mathbf{k}}, \qquad \text{per } t > 0,$$

variabile nello spazio e nel tempo, con $T > 0$ e $\gamma$ parametri dimensionali e $\hat{\mathbf{k}}$ versore dell'asse O$z$ perpendicolare al piano O$xy$.

1. Si determini il flusso $\Phi(t)$ del campo magnetico concatentato con la spira per $t > 0$, adottando la normale alla spira $\hat{\mathbf{k}}$. Per il calcolo si consiglia di utilizzare un sistema di coordinate polari sul piano O$xy$, riconoscendo che $\sqrt{x^2 + y^2}$ è il raggio polare. Si determini quindi la forza elettromotrice indotta $f(t)$.

2. Posto $\tau \equiv L/R$ e assumendo $\tau \neq T$ (caso non risonante), si determini l'intensità $i(t)$ della corrente che circola nella spira per $t > 0$, riferendo il segno della corrente al verso di percorrenza della spira coerente con la normale adottata.

3. Si determini l'energia $\mathcal{E}$ complessivamente dissipata nella spira per effetto Joule.

**Soluzione del Compito di Fisica Generale II del 10 luglio 2018**
**Prof. S. Caprara**

**Esercizio 1.**

1. Poiché $\boldsymbol{E} = -\vec{\nabla} V$ e $V(\boldsymbol{r}) = V(x)$, si ha

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}}\right) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\,\hat{\imath} = \frac{2V_0 a^2 x}{(x^2+a^2)^2}\,\hat{\imath}.$$

Il campo è ovunque parallelo all'asse O$x$.

2. Essendo $\rho = \epsilon_0\,\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_x(x)\,\hat{\imath}$, si ha

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \epsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \epsilon_0\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x} = \frac{2\epsilon_0 V_0 a^2}{(x^2+a^2)^3}\left(a^2 - 3x^2\right).$$

La densità di carica è costante su ogni piano parallelo al piano O$yz$ e dipende solo da $x$. Allora

$$Q_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_S \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\rho(\boldsymbol{r}) = S\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\rho(x) = \epsilon_0 S\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x} = \epsilon_0 S\;E_x(x)|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

3. Poiché $\rho_0(x) = \epsilon_0 E_x'(x)$, dove si è indicata con l'apice la derivazione rispetto ad $x$, il massimo del modulo del campo elettrico è raggiunto nei punti in cui si annulla $\rho$. Si ha quindi

$$x_{max} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}a, \qquad \Rightarrow \qquad |\boldsymbol{E}|_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{|V_0|}{a}.$$

Il luogo dei punti dello spazio in corrispondenza dei quali il massimo è raggiunto è costituito da due piani paralleli al piano O$yz$ e da esso equidistanti.

**Esercizio 2.**

1. Poiché l'elemento di area in coordinate polari è $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, il flusso cercato vale

$$\Phi(t) = \gamma\left(1 - \mathrm{e}^{-t/T}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi\gamma a^3}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/T}\right).$$

La forza elettromotrice indotta è

$$f(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{2\pi\gamma a^3}{3T}\,\mathrm{e}^{-t/T} \equiv -f_0\,\mathrm{e}^{-t/T}.$$

2. L'equazione del circuito è

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = f \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = -\frac{f_0}{L}\,\mathrm{e}^{-t/T}.$$

La soluzione che soddisfa la condizione iniziale $i(t=0) = 0$ è

$$i(t) = \frac{f_0}{L}\frac{T\tau}{\tau - T}\left(\mathrm{e}^{-t/T} - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right).$$

Tale soluzione è la somma della soluzione particolare dell'equazione del circuito e della soluzione generale dell'omogenea associata, presa in corrispondenza del valore della costante d'integrazione che soddisfa la condizione iniziale. Si può verificare che il segno di $i$ è opposto al segno di $f_0$, cioè al segno di $\gamma$, in accordo con la legge di Faraday-Neumann-Lenz.

3. L'energia dissipata per effetto Joule è

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty Ri^2\,\mathrm{d}t = \frac{Rf_0^2T^2\tau^2}{L^2(\tau - T)^2}\int_0^\infty\left(\mathrm{e}^{-t/T} - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)^2\mathrm{d}t = \frac{Rf_0^2T^2\tau^2}{2L^2(T+\tau)} = \frac{2\pi^2\gamma^2a^6}{9R}\frac{1}{T+\tau}.$$