Compito di Fisica Generale II del giugno 2018
Prof. S. Caprara

Esercizio 1. Si consideri la distribuzione di carica descritta in tutto lo spazio dalla densità di volume

$$\rho(r) = K\,\mathrm{e}^{-r^3/a^3},$$

dove $r \geq 0$ è la coordinata radiale sferica, in un sistema di riferimento la cui origine coincide con il centro di simmetria della distribuzione assegnata, $a > 0$ e K sono parametri dimensionali.

1. Si determini la carica totale Q_{tot} associata alla distribuzione assegnata.

2. Si determini il campo elettrostatico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ generato in tutto lo spazio dalla distribuzione assegnata, indicando con $\hat{\boldsymbol{r}}$ il versore radiale.

3. Si consideri ora la situazione in cui lo spazio è riempito di un dielettrico non omogeneo, la cui costante dielettrica relativa varia secondo la legge

$$\epsilon_R(r) = 1 + \frac{b}{r+b}, \qquad \text{per } r \geq 0,$$

dove $b > 0$ è un parametro dimensionale. Si determinino il campo elettrostatico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ generato in tutto lo spazio dalla distribuzione assegnata e la densità delle cariche di polarizzazione $\rho_{pol}(r)$.

Esercizio 2. È assegnato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxyz. Una spira conduttrice quadrata, il cui lato ha lunghezza a e la cui resistenza elettrica è R, si muove sul piano Oxy che la contiene, traslando nella direzione e verso dell'asse Ox. I lati della spira si mantengono paralleli agli assi Ox e Oy. All'istante $t = 0$ la spira giunge alla frontiera del semispazio $x > 0$, nel quale è presente un campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}(x) = B_z(x)\,\hat{\boldsymbol{z}}$, dove $\hat{\boldsymbol{z}}$ è il versore dell'asse Oz e

$$B_z(x) = \frac{\beta x}{x^2 + b^2}, \qquad \text{per } x \geq 0,$$

con $b > 0$ e β parametri dimensionali. Grazie all'intervento di un'opportuna forza esterna $\boldsymbol{F}_{est}$, che compensa la forza esercitata dal campo magnetico, il moto della spira si mantiene rettilineo uniforme, di modo che la velocità della spira $\boldsymbol{v} = v\,\hat{\boldsymbol{x}}$, con $v > 0$ e $\hat{\boldsymbol{x}}$ versore dell'asse Ox, resta costante. Si identifichi la posizione della spira con l'ascissa x_s comune a tutti i punti del lato che all'istante $t = 0$ entra nel semispazio $x > 0$.

1. Si determini il flusso Φ del campo magnetico concatentato con la spira in funzione di x_s, distinguendo i casi $x_s < 0$, $0 \leq x_s \leq a$, e $x_s > a$.

2. Si determini l'intensità $i(t)$ della corrente che circola nella spira per $t > 0$, riferendo il segno della corrente al verso di percorrenza della spira coerente con la normale $\hat{\boldsymbol{z}}$.

3. Si determini la forza $\boldsymbol{F}_{est}(t)$ necessaria a mantenere la spira in moto uniforme per $t > 0$.

Soluzione del Compito di Fisica Generale II del 19 giugno 2018
Prof. S. Caprara

Esercizio 1.

1. La carica contenuta in una sfera di raggio r centrata nell'origine è

$$Q(r) = 4\pi \int_0^r \rho(s)\, s^2\, \mathrm{d}s = 4\pi K \int_0^r \mathrm{e}^{-s^3/a^3}\, s^2\, \mathrm{d}s = \frac{4\pi}{3} K a^3 \left(1 - \mathrm{e}^{-r^3/a^3}\right).$$

La carica totale richiesta è quindi

$$Q_{tot} = \lim_{r\to\infty} Q(r) = \frac{4\pi}{3} K a^3.$$

2. Essendo la distribuzione a simmetria sferica, il campo elettrico è puramente radiale, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\,\hat{\boldsymbol{r}}$, e per il teorema di Gauss la componente radiale del campo è

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{K a^3}{3\epsilon_0 r^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-r^3/a^3}\right).$$

3. Il campo elettrico risultante resta radiale, perché non viene violata la simmetria sferica del problema. Si ha quindi

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0\epsilon_R(r)\, r^2} = \frac{K a^3 (r+b)}{3\epsilon_0 (r+2b) r^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-r^3/a^3}\right).$$

La densità di carica di polarizzazione si può calcolare in vari modi equivalenti, per esempio

$$\rho_{pol}(r) = \epsilon_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \rho(r) = \frac{\epsilon_0}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2 E_r(r)\right] - \rho(r),$$

dove si è usata l'espressione della divergenza in coordinate sferiche e si è tenuto conto del carattere puramente radiale del campo elettrico. Svolgendo i calcoli si trova

$$\rho_{pol}(r) = \frac{K b}{3 r^2 (r+2b)^2}\left[a^3 - \left(a^3 + 3r^3 + 6br^2\right)\mathrm{e}^{-r^3/a^3}\right].$$

Esercizio 2.

1. Se $x_s < 0$, $\Phi(x_s) = 0$; se $0 \le x_s \le a$, si ha

$$\Phi(x_s) = a\int_0^{x_s} B_z(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \beta a \int_0^{x_s} \frac{\xi\,\mathrm{d}\xi}{\xi^2 + b^2} = \frac{\beta a}{2}\log\left(1 + \frac{x_s^2}{b^2}\right);$$

infine, per $x_s > a$, la spira è completamente entrata nel semipiano $x > 0$ e

$$\Phi(x_s) = a\int_{x_s - a}^{x_s} B_z(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \beta a \int_{x_s - a}^{x_s} \frac{\xi\,\mathrm{d}\xi}{\xi^2 + b^2} = \frac{\beta a}{2}\log\left[\frac{x_s^2 + b^2}{(x_s - a)^2 + b^2}\right].$$

2. L'intensità della corrente indotta è

$$i(t) = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x_s}\dot{x}_s.$$

Per $t < 0$ si ha $x_s < 0$ e $i(t) = 0$; per $0 \le t \le a/v$ si ha $0 \le x_s \le a$ e

$$i(t) = -\frac{\beta a v}{R}\frac{vt}{v^2 t^2 + b^2},$$

dove si è usata la legge oraria del moto $x_s = vt$; infine, per $t > a/v$ si ha $x_s > a$ e

$$i(t) = -\frac{\beta a v}{R}\left[\frac{vt}{v^2t^2+b^2} - \frac{vt-a}{(vt-a)^2+b^2}\right].$$

3. La forza $\boldsymbol{F}_{est}$ è opposta alla forza $\boldsymbol{F}_{mag}$ che il campo magnetico esercita sulla spira. Per $t < 0$ si ha $x_s < 0$ e $\boldsymbol{F}_{est}(t) = -\boldsymbol{F}_{mag}(t) = 0$; per $0 \le t \le a/v$ si ha $0 \le x_s \le a$ e

$$\boldsymbol{F}_{est}(t) = -\boldsymbol{F}_{mag}(t) = -i(t)aB_z(x_s = vt)\,\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{\beta^2 a^2 v}{R}\frac{v^2t^2}{(v^2t^2+b^2)^2}\,\hat{\boldsymbol{x}};$$

infine, per $t > a/v$ si ha $x_s > a$ e

$$\boldsymbol{F}_{est}(t) = -\boldsymbol{F}_{mag}(t) = -i(t)a\left[B_z(x_s) - B_z(x_s - a)\right]_{x_s=vt}\,\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{\beta^2 a^2 v}{R}\left[\frac{vt}{v^2t^2+b^2} - \frac{vt-a}{(vt-a)^2+b^2}\right]^2\,\hat{\boldsymbol{x}}.$$

Confrontando le espressioni della forze esterna e dell'intensità di corrente, è facile verificare che la potenza sviluppata dalla forza esterna corrisponde esattamente alla potenza dissipata nella spira per effetto Joule,

$$\boldsymbol{F}_{est} \cdot \boldsymbol{v} = Ri^2.$$