Compito di Fisica Generale II del 9 febbraio 2018
Prof. S. Caprara

Esercizio 1. Le armature di un condensatore piano, ciascuna di superficie S, giacciono sui piani $z = 0$ e $z = d$ (con $d > 0$) del sistema di riferimento adottato. Tra le armature è presente un dielettrico non omogeneo, la cui costante dielettrica relativa varia secondo la legge

$$\epsilon_r(z) = \gamma\, \mathrm{e}^{z/d}, \qquad \text{per } 0 \le z \le d,$$

con $\gamma = 4\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)$. Le armature del condensatore sono poste a potenziale $V(z = 0) = V_0$ e $V(z = d) = V_d = 0$.

1. Si determinino la capacità del condensatore e le cariche sulle due armature, Q_0 e Q_d.

2. Si determinino il potenziale elettrostatico $V(z)$ e il campo elettrostatico $\boldsymbol{E}(z)$ nella regione di spazio compresa tra le armature del condensatore.

2. Si determinino le cariche di polarizzazione del dielettrico, sulle due superfici, $\sigma_{0,pol}$ e $\sigma_{d,pol}$, e nel volume, $\rho_{pol}(z)$.

Esercizio 2. È assegnato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxyz. La barra conduttrice AB, di massa m e lunghezza a, è vincolata a scorrere senza attrito lungo due guide rigide conduttrici, giacenti sul piano $z = 0$ e parallele all'asse x del sistema di riferimento dato, mantenendosi parallela all'asse y, di modo che la sua posizione è, in ogni istante, identificata dall'ascissa x_s comune a tutti i suoi punti. Le due guide hanno lunghezza grande a piacere e sono collegate da un tratto conduttore CD, in modo da formare con la barra AB il circuito ABCD, di resistenza elettrica complessiva R, che nella figura, per semplicità di rappresentazione, è concentrata in un tratto del circuito. All'istante $t = 0$ la barra giunge con velocità $\boldsymbol{v}_0 = v_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ ($v_0 > 0$) alla frontiera del semispazio $x > 0$. Nella regione di spazio compresa tra i piani $x = 0$ e $x = b$ (con $b > 0$) è presente un campo d'induzione magnetica uniforme $\boldsymbol{B} = B\,\hat{\boldsymbol{k}}$. I simboli $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{k}}$ indicano, rispettivamente, i versori degli assi x e z. Si adotti il verso di percorrenza del circuito ABCD coerente con la normale $\hat{\boldsymbol{k}}$.

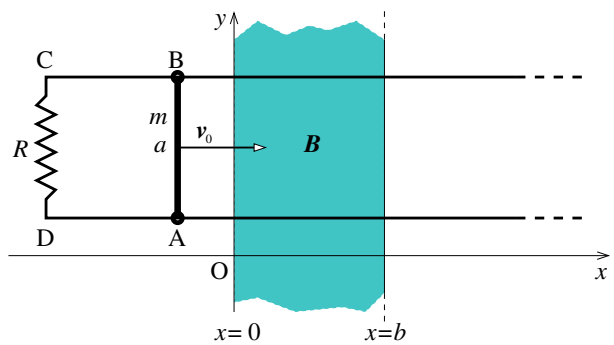

FIG. 1.

1. Si scriva l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione temporale della velocità della barra, $v(t) \equiv \dot{x}_s(t)$, per $t > 0$, distinguendo il caso $0 < x_s < b$ e il caso $x_s \ge b$.

2. Si determini il valore minimo della velocità iniziale, $v_{0,min}$, che permette alla barra di raggiungere la regione di spazio $x \ge b$.

3. Sia ora $v_0 = 2v_{0,min}$, si determini l'energia $\mathcal{E}$ complessivamente dissipata nel circuito ABCD per effetto Joule.

Soluzione del Compito di Fisica Generale II del 9 febbraio 2018
Prof. S. Caprara

Esercizio 1.

1. La C capacità cercata è tale che

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon_0 S}\int_0^d \frac{\mathrm{d}z}{\epsilon_r(z)} = \frac{1}{\epsilon_0 S\gamma}\int_0^d \mathrm{e}^{-z/d}\,\mathrm{d}z = \frac{d}{\epsilon_0 S\gamma}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{4\epsilon_0 S}{d} > \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Quindi

$$Q_0 = CV_0 = \frac{4\epsilon_0 S V_0}{d}, \qquad Q_d = -CV_0 = -\frac{4\epsilon_0 S V_0}{d}.$$

2. Nella regione di spazio compresa tra le armature del condensatore, il potenziale elettrostatico $V(z)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\epsilon_r(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z)\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V(z) = V_0 + A\int_0^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\epsilon_r(\zeta)} = V_0 + \frac{Ad}{\gamma}\left(1-\mathrm{e}^{-z/d}\right),$$

dove si è usata la condizione $V(z=0) = V_0$, mentre la costante d'integrazione A è determinata dalla condizione $V(z=d) = 0$. Si trova quindi

$$A = -\frac{4V_0}{d} \qquad \Rightarrow \qquad V(z) = V_0\left[1 - \frac{4}{\gamma}\left(1-\mathrm{e}^{-z/d}\right)\right].$$

Il campo elettrico tra le armature del condensatore ha solo componente z e

$$E_z(z) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z) = \frac{4V_0}{\gamma d}\mathrm{e}^{-z/d} = \frac{Q_0}{\epsilon_0\epsilon_r(z)S}.$$

3. Il vettore di polarizzazione tra le armature del condensatore ha solo componente z e

$$P_z(z) = \epsilon_0[\epsilon_r(z)-1]E_z(z) = \frac{4\epsilon_0 V_0}{d}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-z/d}}{\gamma}\right) = \frac{Q_0}{S}\left[1 - \frac{1}{\epsilon_r(z)}\right].$$

Quindi

$$\sigma_{0,pol} = -P_z(z=0) = \frac{4\epsilon_0 V_0(1-\gamma)}{\gamma d}, \qquad \sigma_{d,pol} = P_z(z=d) = \frac{4\epsilon_0 V_0(\gamma - \mathrm{e}^{-1})}{\gamma d},$$

e

$$\rho_{pol}(z) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}P_z(z) = -\frac{4\epsilon_0 V_0}{\gamma d^2}\mathrm{e}^{-z/d}.$$

Esercizio 2.

1. Il flusso del campo d'induzione magnetica concatenato con il circuito ABCD vale $\Phi = 0$, per $x_s \leq 0$, $\Phi = Bax_s$, per $0 < x_s < b$, e $\Phi = Bab$, per $x_s \geq b$. Quindi la forza elettromotrice indotta vale $f = 0$ per $x_s \leq 0$, $f = -Bav$, per $0 < x_s < b$, e $f = 0$, per $x_s \geq b$. La corrente indotta ha intensità $i = f/R$. La forza che il campo magnetico esercita sulla barra AB ha solo componente x, che vale $F_x = Bai$. Quindi, l'equazione del moto della barra è

$$\dot{v} = -\frac{B^2a^2}{mR}v \equiv -\frac{1}{\tau}v, \quad \text{per } 0 < x_s < b, \qquad \dot{v} = 0, \quad \text{altrimenti.}$$

2. Integrando l'equazione per v con la condizione iniziale assegnata, si ha $v(t) = v_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, per $0 < x_s < b$ e $v(t) = k$, per $x_s \geq b$, dove la costante k deve essere determinata dalle condizioni di raccordo per la velocità quando $x_s \to b$. Integrando ancora, si tova $x_s(t) = v_0\tau(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$, per $0 < x_s < b$, e $x_s(t) = kt + c$, per $x_s \geq b$, dove la costante c deve essere determinata dalle condizioni di raccordo per $x_s \to b$.

Ci sono due possibilità. Se $v_0\tau < b$, la condizione $x_s(t) < b$ è vera per tutti i $t > 0$. Quindi, il moto della barra per $t > 0$ è descritto dalle leggi orarie $v(t) = v_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ e $x_s(t) = v_0\tau(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$. Per $t \to +\infty$ la barra si arresta nella posizione $x_\infty = v_0\tau < b$. Se, invece $v_0\tau > b$, allora esiste

$$t_* = \tau \log \frac{v_0\tau}{v_0\tau - b} > 0$$

tale che $x(t_*) = b$. Per $t < t_*$, $v(t) = v_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ e $x_s(t) = v_0\tau(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$. Per $t \geq t_*$,

$$v(t) = k = \lim_{t \to t_*^-} v(t) = v_0\,\mathrm{e}^{-t_*/\tau} = v_0 - \frac{b}{\tau} \equiv v_*,$$

e

$$x_s(t) = kt + c = \left(v_0 - \frac{b}{\tau}\right)(t - t_*) + \lim_{t \to t_*^-} x_s(t) = \left(v_0 - \frac{b}{\tau}\right)(t - t_*) + b = v_*(t - t_*) + b.$$

È evidente allora che il valore minimo cercato è $v_{0,min} = b/\tau$, valore in corrispondenza del quale la barra raggiunge la posizione $x_\infty = b$ per $t \to +\infty$. Si osservi anche che, per $v_0 > v_{0,min}$, la velocità residua della barra si può scrivere come $v_* = v_0 - v_{0,min} > 0$.

3. Sia ora $v_0 = 2b/\tau$. L'energia dissipata per effetto Joule è

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} Ri^2\,\mathrm{d}t,$$

con

$$i(t) = \frac{f(t)}{R} = -\frac{Ba}{R}v(t) = -\frac{2Bab}{R\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau},$$

per $0 < t < t_*$, e $i(t) = 0$, altrimenti. Quindi

$$\mathcal{E} = \frac{4B^2a^2b^2}{R\tau^2}\int_0^{t_*} \mathrm{e}^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{2B^2a^2b^2}{R\tau}\left(1 - \mathrm{e}^{-2t_*/\tau}\right) = \frac{3B^2a^2b^2}{2R\tau} = \frac{3mb^2}{2\tau^2}.$$

Il risultato si può anche ottenere senza integrare. La velocità della barra per $x_s \geq b$ è v_*, e l'energia dissipata per effetto Joule si ottiene calcolando la riduzione dell'energia cinetica della barra, quindi

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_*^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left[1 - \left(1 - \frac{b}{v_0\tau}\right)^2\right] = \frac{1}{2}mv_0^2\left[1 - \left(1 - \frac{v_{0,min}}{v_0}\right)^2\right] = \frac{3}{2}mv_{0,min}^2 = \frac{3mb^2}{2\tau^2}.$$