Compito di Fisica Generale II del 23 gennaio 2018
Prof. S. Caprara

Esercizio 1. Due sfere conduttrici di raggio, rispettivamente, a e b, poste a distanza talmente grande da poter trascurare gli effetti di mutua induzione elettrostatica, hanno inizialmente potenziale elettrostatico V_a^0 e V_b^0 (assumendo nullo il potenziale all'infinito). All'istante $t = 0$ le due sfere vengono collegate da un filo conduttore di resistenza elettrica R.

1. Determinare le cariche inizialmente presenti sulle due sfere conduttrici, Q_a^0 e Q_b^0.

2. Scrivere le equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione dei potenziali delle due sfere conduttrici, $V_a(t)$ e $V_b(t)$, per $t > 0$, specificando le condizioni iniziali per le due equazioni.

3. Determinare i potenziali delle due sfere conduttrici, V_a^∞ e V_b^∞, e le cariche presenti su di esse, Q_a^∞ e Q_b^∞, per $t \to +\infty$. [N.B. per rispondere a questa domanda non è necessario integrare le equazioni differenziali trovate al punto precedente].

Esercizio 2. È assegnata una distribuzione di corrente a simmetria cilindrica, caratterizzata dalla densità di corrente $\boldsymbol{j}(x, y, z) = j_z(\rho)\hat{\boldsymbol{k}}$, dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ è la distanza dall'asse di simmetria della distribuzione, coincidente con l'asse z del sistema di coordinate adottato, $\hat{\boldsymbol{k}}$ è il versore di tale asse, e

$$j_z(\rho) = 0, \qquad \text{per } \rho < a,$$
$$j_z(\rho) = \frac{K(\rho - a)}{\rho^4}, \qquad \text{per } \rho \geq a,$$

con $a > 0$ e K costanti dimensionali.

1. Determinare l'intensità totale i_{tot} della corrente associata alla distribuzione assegnata.

2. Determinare il campo d'induzione magnetica $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ generato in tutto lo spazio dalla distribuzione assegnata. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{\theta}} \equiv (-y/\rho, x/\rho, 0)$ il versore del campo $\boldsymbol{B}$ nel punto (x, y, z).

3. Si determinino la distanza ρ_{max} dall'asse di simmetria della distribuzione in corrispondenza della quale l'intensità del campo $\boldsymbol{B}$ è massima, e il valore di tale intensità, B_{max}.

Soluzione del compito di Fisica Generale II del 23 gennaio 2018
Prof. S. Caprara

Esercizio 1.

1. Le capacità delle due sfere valgono, rispettivamente, $C_a = 4\pi\varepsilon_0 a$ e $C_b = 4\pi\varepsilon_0 b$, di modo che $Q_a^0 = C_a V_a^0 = 4\pi\varepsilon_0 a V_a^0$ e $Q_b^0 = C_b V_b^0 = 4\pi\varepsilon_0 b V_b^0$.

2. Riferendo il segno della corrente alla direzione che va dalla sfera di raggio a alla sfera di raggio b, l'intensità della corrente che scorre nel filo conduttore che collega le due sfere è $i = \dot{Q}_b = -\dot{Q}_a$. Ma ad ogni istante $Q_a = C_a V_a$ e $Q_b = C_b V_b$, per cui la legge di Ohm dà

$$\begin{cases} RC_a \dot{V}_a &= V_b - V_a, \\ RC_b \dot{V}_b &= V_a - V_b, \end{cases}$$

con condizioni iniziali $V_a(t=0) = V_a^0$ e $V_b(t=0) = V_b^0$.

3. Per $t \to +\infty$ le due sfere raggiungono l'equilibrio elettrostatico, per cui $V_a^\infty = V_b^\infty$. La conservazione della carica impone che $C_a V_a^\infty + C_b V_b^\infty = C_a V_a^0 + C_b V_b^0$. Risolvendo il sistema di due equazioni in due incognite si trova

$$V_a^\infty = V_b^\infty = \frac{C_a V_a^0 + C_b V_b^0}{C_a + C_b}.$$

Quindi

$$Q_a^\infty = C_a V_a^\infty = C_a \frac{C_a V_a^0 + C_b V_b^0}{C_a + C_b}, \qquad Q_b^\infty = C_b V_b^\infty = C_b \frac{C_a V_a^0 + C_b V_b^0}{C_a + C_b}.$$

Questi risultati, ovviamente, possono essere ottenuti anche integrando le equazioni per i potenziali. Introducendo l'incognita $u \equiv V_a - V_b$, dalle equazioni per i potenziali si ottiene un'equazione per la sola u,

$$\dot{u} = -\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b}\right) u,$$

con condizione iniziale $u(t=0) = u_0 \equiv V_a^0 - V_b^0$. Ponendo $\frac{1}{\tau} \equiv \frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b}\right)$, la soluzione dell'equazione per u è $u = u_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Quindi, integrando le equazioni

$$\dot{V}_a = -\frac{1}{RC_a} u(t), \qquad \dot{V}_b = \frac{1}{RC_b} u(t),$$

con le condizioni iniziali appropriate, si ottiene

$$V_a = V_a^0 + \frac{u_0 \tau}{RC_a}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right), \qquad V_b = V_b^0 - \frac{u_0 \tau}{RC_b}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right).$$

Per $t \to +\infty$,

$$V_a^\infty = V_a^0 - \frac{u_0 \tau}{RC_a} = \frac{C_a V_a^0 + C_b V_b^0}{C_a + C_b} = V_b^0 + \frac{u_0 \tau}{RC_b} = V_b^\infty.$$

Esercizio 2.

1. L'intensità cercata è

$$i_{tot} = \int_0^\infty j_z(\rho)\, 2\pi\rho\, \mathrm{d}\rho = 2\pi K \int_a^\infty \frac{\rho - a}{\rho^3}\, \mathrm{d}\rho = \frac{\pi K}{a}.$$

2. L'intensità della corrente concatenata con una circonferenza di centro sull'asse z e raggio ρ, perpendicolare a tale asse, è

$$i_{conc}(\rho) = \int_0^\rho j_z(s)\, 2\pi s\, \mathrm{d}s = \begin{cases} 0, & \text{per } \rho < a, \\ 2\pi K \left(\frac{a}{2\rho^2} - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2a} \right) = i_{tot} \left(1 - \frac{2a}{\rho} + \frac{a^2}{\rho^2} \right), & \text{per } \rho \geq a. \end{cases}$$

È evidente che $i_{tot} = \lim_{\rho \to \infty} i_{conc}(\rho)$. Per il teorema della circuitazione di Ampère

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 i_{conc}(\rho)}{2\pi\rho}\, \hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{cases} 0, & \text{per } \rho < a, \\ \frac{\mu_0 K}{2a\rho} \left(1 - \frac{2a}{\rho} + \frac{a^2}{\rho^2} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}, & \text{per } \rho \geq a. \end{cases}$$

3. Il massimo cercato corrisponde al massimo della funzione non negativa, continua e derivabile,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < 1, \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}, & \text{per } x \geq 1, \end{cases}$$

con $x \equiv \rho/a$. L'equazione $f'(x) = 0$ ammette al finito le soluzioni $x \leq 1$ e $x = 3$. La seconda corrisponde al massimo cercato, per cui $\rho_{max} = 3a$. L'intensità massima è quindi

$$B_{max} = \frac{2\mu_0 |K|}{27a^2}.$$