Prova in itinere di Fisica Generale II del 9 gennaio 2018
Prof. S. Caprara

Sul piano Π è fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy. La barra conduttrice AB, di massa m e lunghezza a, è vincolata a scorrere senza attrito lungo due guide rigide conduttrici, giacenti su Π e parallele all'asse x del sistema di riferimento adottato, mantenendosi parallela all'asse y, di modo che la sua posizione è, in ogni istante, identificata dall'ascissa x_s comune a tutti i suoi punti. Le due guide hanno lunghezza grande a piacere e sono collegate da un tratto conduttore CD, in modo da formare con la barra AB il circuito ABCD, di resistenza elettrica complessiva R, che nella figura, per semplicità di rappresentazione, è concentrata in un tratto del circuito. Nel circuito è anche presente un condensatore di capacità C, inizialmente scarico. All'istante $t = 0$ la barra giunge con velocità $\boldsymbol{v}_0 = v_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ ($v_0 > 0$) alla frontiera del semispazio $x > 0$, nel quale è presente un campo d'induzione magnetica uniforme $\boldsymbol{B} = B\,\hat{\boldsymbol{k}}$, perpendicolare al piano Π. I simboli $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{k}}$ indicano, rispettivamente, i versori degli assi x e z (quest'ultimo è perpendicolare al piano Π e passa per O, in modo da formare con gli assi x e y una terna destrorsa). Si adotti il verso di percorrenza del circuito ABCD coerente con la normale $\hat{\boldsymbol{k}}$.

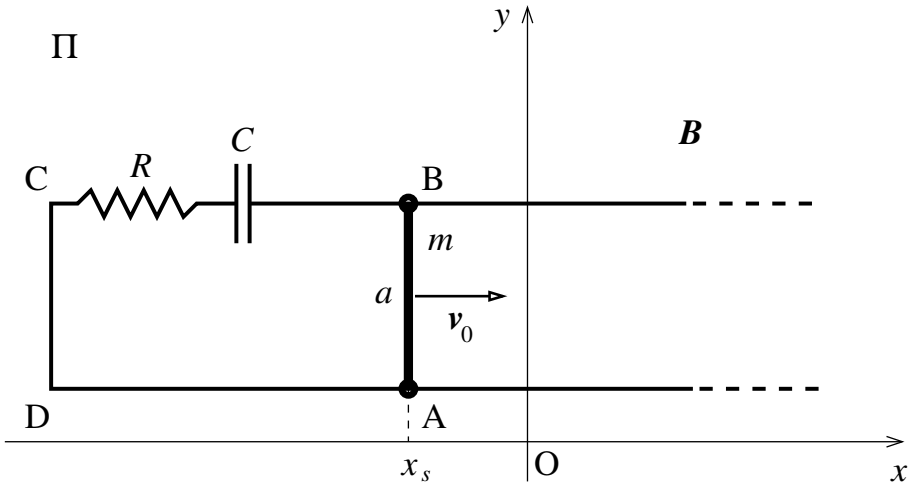

FIG. 1.

1. Si scrivano le due equazioni differenziali che descrivono le evoluzioni temporali accoppiate della carica $q(t)$ presente sulle armature del condensatore e della velocità della barra $v(t) \equiv \dot{x}_s(t)$ per $t > 0$, e si verifichi che l'equazione del moto della barra ammette un integrale primo che permette di scrivere v in funzione di q e dei dati iniziali.

2. Eliminata la velocità v tramite l'integrale primo ottenuto al punto precedente e ricavata l'equazione differenziale per la sola $q(t)$, si ponga

$$\frac{1}{\tau} \equiv \frac{1}{RC} + \frac{B^2 a^2}{mR},$$

si determini l'espressione di $q(t)$ che soddisfa la condizione iniziale posta dal problema in esame e si trovino i valori asintotici per $t \to +\infty$ della carica e della velocità, rispettivamente q_∞ e v_∞.

3. Si determini l'energia $\mathcal{E}$ complessivamente dissipata nel circuito per effetto Joule.

Soluzione della prova in itinere di Fisica Generale II del 9 gennaio 2018
Prof. S. Caprara

1. Il flusso del campo d'induzione magnetica concatenato con il circuito ABCD vale $\Phi = 0$, per $x_s < 0$, e $\Phi = Bax_s$, per $x_s \geq 0$. La forza elettromotrice indotta è quindi $f = 0$, per $x_s < 0$, e $f = -Bav$ per, $x_s \geq 0$. Se si indica con q la carica presente sull'armatura del condensatore che si incontra girando lungo il circuito nel verso di percorrenza adottato, l'intensità della corrente che circola nel circuito è $i = \dot{q}$ e l'equazione che descrive il circuito per $t > 0$ è

$$Bav + \frac{q}{C} + R\dot{q} = 0.$$

La forza che agisce sulla barra AB ha solo componente x, pari a $F = iaB = Ba\dot{q}$, per cui l'equazione del moto della barra per $t > 0$ è

$$m\dot{v} = Ba\dot{q}.$$

Poiché primo e secondo membro sono derivate totali, questa equazione ammette l'integrale primo

$$mv - Baq = \text{costante} = mv_0 - Baq_0 = mv_0,$$

avendo usato la condizione iniziale sui valori della velocità $v(t = 0) = v_0$ e della carica $q(t = 0) = q_0 = 0$. Quindi

$$v = v_0 + \frac{Ba}{m}q.$$

2. Sostituendo l'espressione per v nell'equazione del circuito si trova

$$\dot{q} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{B^2a^2}{mR}\right)q + \frac{Bav_0}{R} = 0.$$

La soluzione che soddisfa la condizione iniziale $q(t = 0) = 0$ è

$$q(t) = \frac{Bav_0\tau}{R}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right),$$

dove si è posto

$$\frac{1}{\tau} \equiv \frac{1}{RC} + \frac{B^2a^2}{mR},$$

come suggerito dalla traccia. Quindi

$$q_\infty = -\frac{Bav_0\tau}{R} = -CBav_0\,\frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + \frac{B^2a^2}{mR}}, \qquad v_\infty = v_0 + \frac{Ba}{m}q_\infty = v_0\left(1 - \frac{B^2a^2}{mR}\tau\right) = v_0\,\frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + \frac{B^2a^2}{mR}}.$$

È evidente che $0 < v_\infty < v_0$ e $q_\infty = -CBav_\infty$.

3. L'intensità della corrente che circola nel circuito ABCD per $t > 0$ è

$$i(t) = \dot{q}(t) = -\frac{Bav_0}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Quindi

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} Ri^2\,\mathrm{d}t = \frac{B^2a^2v_0^2}{R}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{B^2a^2v_0^2\tau}{2R} = \frac{\frac{B^2a^2}{mR}}{\frac{1}{RC} + \frac{B^2a^2}{mR}}\,\frac{1}{2}mv_0^2,$$

da cui è evidente che $0 < \mathcal{E} < \frac{1}{2}mv_0^2$.

OSSERVAZIONI:

Il valore di $\mathcal{E}$ si può calcolare anche senza integrare, osservando che dalle equazioni che descrivono il sistema (moltiplicando quella del circuito per i e quella del moto per v e sommando membro a membro) si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{q^2}{2C}\right)=-Ri^2,$$

da cui è evidente che l'energia dissipata per effetto Joule è pari a meno la variazione della somma dell'energia cinetica della barra e dell'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore,

$$\mathcal{E}=\left(\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{q_0^2}{2C}\right)-\left(\frac{1}{2}mv_\infty^2+\frac{q_\infty^2}{2C}\right)=\frac{1}{2}m\left(v_0^2-v_\infty^2\right)-\frac{q_\infty^2}{2C}=\frac{B^2a^2v_0^2\tau}{2R}.$$

Volendo fare un bilancio energetico per il problema in esame, l'energia cinetica iniziale della barra, $\frac{1}{2}mv_0^2$, è stata impiegata in parte per caricare il condensatore, $\frac{q_\infty^2}{2C}$, in parte per compensare l'energia $\mathcal{E}$ dissipata per effetto Joule. La parte rimanente, $\frac{1}{2}mv_\infty^2$, è l'energia cinetica residua della barra:

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{q_\infty^2}{2C}+\mathcal{E}+\frac{1}{2}mv_\infty^2.$$

Le entità dei vari termini dipendono dal rapporto tra le due scale di tempo caratteristiche del problema, $\tau_b\equiv\frac{mR}{B^2a^2}$ e $\tau_c\equiv RC$:

$$\frac{q_\infty^2}{2C}=\frac{\frac{\tau_b}{\tau_c}}{\left(1+\frac{\tau_b}{\tau_c}\right)^2}\frac{1}{2}mv_0^2,\qquad \mathcal{E}=\frac{1}{1+\frac{\tau_b}{\tau_c}}\frac{1}{2}mv_0^2,\qquad \frac{1}{2}mv_\infty^2=\frac{\left(\frac{\tau_b}{\tau_c}\right)^2}{\left(1+\frac{\tau_b}{\tau_c}\right)^2}\frac{1}{2}mv_0^2.$$

Posto $r\equiv\frac{\tau_b}{\tau_c}$ e indicate le frazioni corrispondenti ai tre termini con

$$p_1\equiv\frac{r}{(1+r)^2},\qquad p_2\equiv\frac{1}{1+r},\qquad p_3\equiv\frac{r^2}{(1+r)^2},$$

è evidente che $p_1+p_2+p_3=1$. Per $r\to 0$ (limite di campo magnetico forte), $p_1\approx r+o(r)$, $p_2\approx 1-r+o(r)$, $p_3\approx r^2+o(r^2)$. Per $r\to+\infty$ (limite di campo magnetico debole), $p_1\approx r^{-1}+o(r^{-1})$, $p_2\approx r^{-1}+o(r^{-1})$, $p_3\approx 1-2r^{-1}+o(r^{-1})$.