Compito di Fisica Generale II del 16 settembre 2015

Proff. S. Caprara e A. Crisanti

Si consideri una distribuzione di corrente a simmetria cilindrica e si adotti un sistema di coordinate cilindriche (ρ, ϑ, z) con asse z coincidente con l'asse di simmetria della distribuzione. La densità di corrente $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = (0, 0, j_z(\rho))$ ha come unica componente non nulla

$$j_z(\rho) = j_0 \, \mathrm{e}^{-\rho^2/d^2},$$

dove $d > 0$ e j_0 sono costanti dimensionali, e ρ è la distanza dall'asse di simmetria della distribuzione. Si indichino con $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ e $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$, rispettivamente, i versori associati alle coordinate cilindriche radiale e angolare.

Si chiede di determinare:

1. L'intensità di corrente totale i_{tot} associata alla distribuzione assegnata.

2. Il campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ generato in tutto lo spazio dalla distribuzione di corrente assegnata. In particolare, si trovi il comportamento asintotico del campo per $\rho \to 0$, dimostrando che è indipendente dal parametro d.

3. La forza $\boldsymbol{f}$ per unità di lunghezza esercitata dalla distribuzione assegnata su un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente di intensità $i_0 = j_0 d^2$, posto a distanza d dall'asse di simmetria della distribuzione e parallelo a tale asse.

Soluzione

1. Per definizione di densità di corrente

$$i_{\text{tot}} = 2\pi \int_0^\infty j_z(\rho)\rho \, \mathrm{d}\rho = \pi j_0 d^2.$$

2. La corrente concatenata con una circonferenza di raggio ρ perpendicolare all'asse z e con centro su tale asse è

$$i_{\text{conc}}(\rho) = 2\pi \int_0^\rho j_z(s) s \, \mathrm{d}s = \pi j_0 d^2 \left(1 - \mathrm{e}^{-\rho^2/d^2}\right) = i_{\text{tot}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\rho^2/d^2}\right).$$

Data la simmetria della distribuzione di correnti, l'unica componente non nulla del campo $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B_\vartheta(\rho)\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ è la componente angolare

$$B_\vartheta(\rho) = \frac{\mu_0 i_{\text{conc}}(\rho)}{2\pi\rho} = \frac{\mu_0 j_0 d^2}{2\rho} \left(1 - \mathrm{e}^{-\rho^2/d^2}\right).$$

Per $\rho \to 0$, sviluppando l'esponenziale, si trova

$$B_\vartheta(\rho) \approx \frac{\mu_0 j_0 \rho}{2}.$$

Questa espressione asintotica è valida in tutto il dominio $\rho \ll d$.

3. La forza richiesta è

$$\boldsymbol{f} = i_0 B_\vartheta(\rho = d)\, \hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{\vartheta}} = -\frac{\mu_0 j_0^2 d^3}{2} \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \hat{\boldsymbol{\rho}}.$$