Prova in itinere di Fisica Generale II

del 17 novembre 2016

Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

Si consideri la distribuzione di carica a simmetria sferica descritta dalla densità volumetrica di carica

$$\rho(r) = \frac{3A}{\pi R^3}\left(\frac{r}{R} - 1\right), \quad \text{per } r \leq R, \qquad \rho(r) = 0, \quad \text{per } r > R,$$

dove $R > 0$ e A sono parametri dimensionali, e r è la coordinata radiale in un sistema di coordinate sferiche con l'origine O nel centro della distribuzione. Tale distribuzione è contenuta in un guscio sferico conduttore con centro in O, di raggio interno $R_i = 2R$ e raggio esterno $R_e = 3R$. Il guscio sferico ha una carica complessiva Q_G.

1. Si determini il parametro A sapendo che la carica totale del sistema costituito dalla distribuzione assegnata e dal guscio sferico è nulla.

Nel caso determinato al punto precedente, si chiede di determinare:

2. Il campo elettrostatico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ generato in tutto lo spazio dalla distribuzione assegnata e dal guscio sferico. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{r}}$ il versore radiale.

3. Il potenziale elettrostatico $V(\boldsymbol{r})$ generato in tutto lo spazio dalla distribuzione assegnata e dal guscio sferico, assumendo che esso si annulli all'infinito.

4. L'energia elettrostatica $\mathcal{U}$ complessivamente immagazzinata nel sistema.

Soluzione della prova in itinere di Fisica Generale II

del 17 novembre 2016

Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

1. La carica complessiva associata alla distribuzione assegnata è

$$Q_\rho = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 \, \mathrm{d}r = 12A \int_0^1 (\zeta - 1)\, \zeta^2 \, \mathrm{d}\zeta = -A,$$

dove si è usato il cambio di variabile $\zeta = r/R$. Poiché la carica totale del sistema è $Q_\rho + Q_G = 0$, si ha $A = Q_G$. I punti successivi sono risolti per tale determinazione di A

2. Per $r \leq R$, indichiamo con $Q(r)$ la carica contenuta in una sfera di centro O e raggio r. Si ha

$$Q(r) = 4\pi \int_0^r \rho(s) s^2 \, \mathrm{d}s = 12\, Q_G \int_0^{r/R} (\zeta - 1)\, \zeta^2 \, \mathrm{d}\zeta = Q_G \left[3 \left(\frac{r}{R}\right)^4 - 4 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \right].$$

Allora, per il teorema di Gauss, la componente radiale del campo elettrico è

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_G}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left[3 \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 4 \left(\frac{r}{R}\right) \right],$$

e $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\hat{\boldsymbol{r}}$. Per $R < r < 2R$, la carica contenuta in una sfera di centro O e raggio r vale $-Q_G$ e il campo elettrico è quello di un monopolo, con

$$E_r(r) = \frac{-Q_G}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{Q_G}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^2,$$

e $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\hat{\boldsymbol{r}}$. Per $r \geq 2R$ la carica contenuta in una sfera di centro O e raggio r è nulla e il campo elettrico è nullo, $E_r(r) = 0$.

3. Per $r \geq 2R$, essendo nullo il campo elettrico, il potenziale elettrostatico è costante. Avendo assunto nullo il potenziale all'infinito, si ha $V(\boldsymbol{r}) = 0$. Per $R < r < 2R$ si ha

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_r^{2R} \frac{-Q_G}{4\pi\epsilon_0 s^2} \, \mathrm{d}s = \frac{Q_G}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{2} - \frac{R}{r} \right).$$

Per $r \leq R$,

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{Q_G}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_G}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_r^R \left[3 \left(\frac{s}{R}\right)^2 - 4 \left(\frac{s}{R}\right) \right] \mathrm{d}s = \frac{Q_G}{4\pi\epsilon_0 R} \left[2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^3 - \frac{3}{2} \right].$$

4. Si ha

$$\mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2R} [E_r(r)]^2 \, 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{Q_G^2}{8\pi\epsilon_0 R} \left[\int_0^1 \left(3\zeta^2 - 4\zeta\right)^2 \zeta^2 \, \mathrm{d}\zeta + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^2} \right] = \frac{69}{70} \frac{Q_G^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Lo stesso risultato si trova, in maniera alternativa, calcolando

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^R \rho(r) V(r)\, 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{Q_G^2}{8\pi\epsilon_0 R} \int_0^1 (\zeta - 1) \left(24\zeta^2 - 12\zeta^3 - 18\right) \zeta^2 \, \mathrm{d}\zeta.$$

In questo calcolo, la carica Q_G presente sulla superficie interna del guscio sferico non contribuisce all'energia, perché si trova a potenziale nullo.