Compito di Fisica Generale II del 14 giugno 2017
Proff. S. Caprara, G. Amelino-Camelia

Esercizio 1. Si consideri la distribuzione di carica a simmetria sferica descritta dalla densità di carica

$$\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{Kr}{16\pi\ell^4}, & \text{per } r \leq 2\ell, \\ 0, & \text{per } r > 2\ell, \end{cases}$$

dove $\ell > 0$ e K sono parametri dimensionali, e r è la coordinata radiale sferica di un opportuno sistema di riferimento la cui origine coincide con il centro della distribuzione.

1. Si determini la carica totale Q_{tot} associata alla distribuzione assegnata.

2. Si determinino il campo elettrostatico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ e il potenziale elettrostatico $V(r)$ generati in tutto lo spazio dalla distribuzione assegnata, assumendo che il potenziale si annulli all'infinito. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{r}}$ il versore radiale.

3. Si determini l'energia elettrostatica $\mathcal{U}$ immagazzinata dalla distribuzione assegnata.

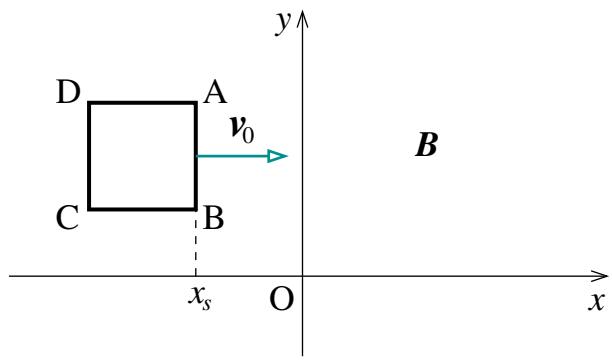

FIG. 1.

Esercizio 2. La spira rigida quadrata ABCD, di lato ℓ, massa m, e resistenza elettrica R, è vincolata a muoversi di moto traslatorio sul piano xy, mantenendo i lati paralleli agli assi di un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale. La posizione della spira è individuata univocamente dell'ascissa x_s comune a tutti i punti del lato AB, come mostrato in FIG. 1. La spira, che ha inizialmente velocità $\boldsymbol{v}_0 = v_0\,\hat{\boldsymbol{x}}$, con $v_0 > 0$, giunge all'istante $t = 0$ alla frontiera del semipiano $x > 0$, nel quale è presente un campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B} = \beta(x)\,\hat{\boldsymbol{z}}$, perpendicolare al piano xy. I simboli $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{z}}$ rappresentano i versori dei rispettivi assi. Il campo $\boldsymbol{B}$ dipende dalla posizione secondo la legge $\beta(x) = \gamma x^2$, per $x > 0$, dove γ è un parametro dimensionale.

1. Si esprimano il flusso del campo $\boldsymbol{B}$ concatenato con la spira in funzione della posizione della spira, $\Phi(x_s)$, e l'intensità della corrente indotta nella spira in funzione della posizione e della velocità della spira, $i(x_s, \dot{x}_s)$. Si riferisca il segno di i al verso di percorrenza della spira coerente con la normale $\hat{\boldsymbol{z}}$.

2. Si determini la forza che agisce sulla spira, in funzione della posizione e della velocità della spira, $\boldsymbol{F}(x_s, \dot{x}_s)$.

3. Si determinino la velocità della spira $v = \dot{x}_s$, in funzione della posizione della spira x_s e della velocità iniziale v_0, e il valore minimo della velocità iniziale, v_0^{min}, che consente alla spira di entrare completamente nel semipiano $x > 0$.

Soluzione del compito di Fisica Generale II del 14 giugno 2017
Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

Esercizio 1.

1. La carica totale è

$$Q_{tot} = \int_0^\infty \rho(r)\, 4\pi r^2\, \mathrm{d}r = \frac{K}{4\ell^4} \int_0^{2\ell} r^3\, \mathrm{d}r = K.$$

2. La carica racchiusa in una sfera di raggio r centrata nell'origine vale

$$Q(r) = \int_0^r \rho(s)\, 4\pi s^2\, \mathrm{d}s = \begin{cases} \dfrac{K}{4\ell^4} \displaystyle\int_0^r s^3\, \mathrm{d}s = K \left(\dfrac{r}{2\ell}\right)^4, & \text{per } r \leq 2\ell, \\[2ex] \dfrac{K}{4\ell^4} \displaystyle\int_0^{2\ell} s^3\, \mathrm{d}s = K, & \text{per } r > 2\ell. \end{cases}$$

Il campo elettrico è radiale, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ e, per il teorema di Gauss,

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \begin{cases} \dfrac{K}{16\pi\epsilon_0\ell^2} \left(\dfrac{r}{2\ell}\right)^2, & \text{per } r \leq 2\ell, \\[2ex] \dfrac{K}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & \text{per } r > 2\ell. \end{cases}$$

Il potenziale elettrostatico è

$$V(r) = \int_r^\infty E_r(s)\, \mathrm{d}s = \begin{cases} \dfrac{K}{16\pi\epsilon_0\ell^2} \displaystyle\int_r^{2\ell} \left(\dfrac{s}{2\ell}\right)^2 \mathrm{d}s + \dfrac{K}{4\pi\epsilon_0} \displaystyle\int_{2\ell}^\infty \dfrac{\mathrm{d}s}{s^2} = \dfrac{K}{24\pi\epsilon_0\ell} \left[4 - \left(\dfrac{r}{2\ell}\right)^3\right], & \text{per } r \leq 2\ell, \\[2ex] \dfrac{K}{4\pi\epsilon_0} \displaystyle\int_r^\infty \dfrac{\mathrm{d}s}{s^2} = \dfrac{K}{4\pi\epsilon_0 r}, & \text{per } r > 2\ell. \end{cases}$$

3. L'energia elettrostatica si può calcolare in due modi equivalenti:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^\infty V(r)\rho(r)\, 4\pi r^2\, \mathrm{d}r = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\infty \left[E_r(r)\right]^2\, 4\pi r^2\, \mathrm{d}r.$$

Il primo metodo ha il vantaggio che, essendo il supporto di $\rho(r)$ finito, l'integrale è esteso solo alla regione di spazio in cui sono presenti le cariche, mentre con il secondo metodo, poiché il campo si estende fino all'infinito, bisogna integrare su tutto lo spazio. I due calcoli danno ovviamente lo stesso risultato

$$\mathcal{U} = \frac{K^2}{14\pi\epsilon_0\ell}.$$

Esercizio 2.

1. Il flusso cercato vale $\Phi(x_s) = 0$, per $x_s < 0$,

$$\Phi(x_s) = \gamma\ell \int_0^{x_s} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\gamma\ell x_s^3, \qquad \text{per } 0 \le x_s \le \ell,$$

e

$$\Phi(x_s) = \gamma\ell \int_{x_s-\ell}^{x_s} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\gamma\ell^2 \left(3x_s^2 - 3\ell x_s + \ell^2\right), \qquad \text{per } x_s > \ell.$$

L'intensità della corrente è

$$i(x_s, \dot{x}_s) = -\frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x_s}\right)\dot{x}_s = \begin{cases} 0, & \text{per } x_s < 0, \\ -\dfrac{\gamma\ell}{R} x_s^2 \dot{x}_s, & \text{per } 0 \le x_s \le \ell \\ -\dfrac{\gamma\ell^2}{R}(2x_s - \ell)\dot{x}_s, & \text{per } x_s > \ell. \end{cases}$$

2. La forza ha solo componente x, $\boldsymbol{F} = F_x \hat{\boldsymbol{x}}$. Si ha $F_x = 0$, per $x_s < 0$,

$$F_x = \left(-\frac{\gamma\ell}{R} x_s^2 \dot{x}_s\right) \ell \, \gamma x_s^2 = -\frac{\gamma^2\ell^2}{R} x_s^4 \dot{x}_s, \qquad \text{per } 0 \le x_s \le \ell,$$

e

$$F_x = \left(-\frac{\gamma\ell}{R} x_s^2 \dot{x}_s\right) \ell \left[\gamma x_s^2 - \gamma(x_s - \ell)^2\right] = -\frac{\gamma^2\ell^3}{R}(2x_s - \ell) x_s^2 \dot{x}_s, \qquad \text{per } x_s > \ell.$$

2. Poiché $F_x(x_s, \dot{x}_s) = -\frac{\gamma^2\ell^2}{R} f(x_s)\dot{x}_s$ si scrive come il prodotto di una funzione della sola x_s per la velocità $\dot{x}_s$, l'equazione del moto è

$$\mathrm{d}v = \frac{F_x(x_s, \dot{x}_s)}{m}\mathrm{d}t = -\frac{\gamma^2\ell^2}{mR} f(x_s)\dot{x}_s \, \mathrm{d}t = -\frac{\gamma^2\ell^2}{mR} f(x_s) \, \mathrm{d}x_s,$$

in cui si sono separate le variabili v e x_s. Confrontando con le varie espressioni per F_x, si trova $f(x_s) = 0$, per $x_s < 0$, $f(x_s) = x_s^4$, per $0 \le x_s \le \ell$, e $f(x_s) = \ell(2x_s - \ell)x_s^2$, per $x_s > \ell$. Integrando, tenuto conto della condizione iniziale, si trova $v = v_0$ per $x_s < 0$,

$$v = \max\left(v_0 - \frac{\gamma^2\ell^2}{5mR} x_s^5; 0\right), \qquad \text{per } 0 \le x_s \le \ell.$$

Il valore minimo cercato è quello tale per cui v si annulla esattamente per $x_s = \ell$, da cui

$$v_0^{min} = \frac{\gamma^2\ell^7}{5mR}.$$

Se $v_0 > v_0^{min}$ la spira entra completamente nel semipiano $x > 0$. In questo caso

$$v = \max\left(v_0 - \frac{17\gamma^2\ell^7}{60mR} - \frac{\gamma^2\ell^3}{12mR} x_s^3(3x_s - 4\ell); 0\right), \qquad \text{per } x_s > \ell.$$

Si osservi che v è continua in $x_s = 0$ e $x_s = \ell$.