Compito di Fisica Generale II del 18 luglio 2017
Proff. S. Caprara, G. Amelino-Camelia

Esercizio 1. Si consideri un condensatore piano le cui armature giacciono sui piani $z = 0$ e $z = d$ di un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Le due armature, di superficie S, sono tenute, rispettivamente, al potenziale $V(z = 0) = V_0$ e $V(z = d) = 0$. Tra le due armature è presente un dielettrico non omogeneo la cui costante dielettrica varia secondo la legge

$$\epsilon_r(z) = \frac{2}{1 + \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)}, \qquad \text{per } 0 \leq z \leq d.$$

1. Si determinino la capacità C del condensatore e le cariche Q_0 e Q_d presenti sulle due armature (qui e nel seguito, i pedici 0 e d indicano, rispettivamente, le armature sui piani $z = 0$ e $z = d$).

2. Si determinino il potenziale elettrostatico $V(z)$ e il campo elettrico $\boldsymbol{E}(z)$ per $0 \leq z \leq d$. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{z}}$ il versore dell'asse z, perpendicolare alle armature del condensatore.

3. Si determinino le densità superficiali σ_0 e σ_d delle cariche di polarizzazione in prossimità delle due armature del condensatore e la densità di volume $\rho(z)$ delle cariche di polarizzazione in seno al dielettrico.

Esercizio 2. Si consideri la distribuzione di correnti a simmetria cilindrica definita dalla densità di corrente $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = j_z(\rho)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, dove $\hat{\boldsymbol{k}}$ è il versore dell'asse di simmetria della distribuzione, ρ è la coordinata radiale cilindrica in un opportuno sistema di riferimento, il cui asse z coincide con l'asse di simmetria della distribuzione, e

$$j_z(\rho) = \frac{A\ell^2}{\rho^4 + \ell^4}, \qquad \text{per } \rho \geq 0,$$

dove $\ell > 0$ e A sono parametri dimensionali.

1. Si determini l'intensità della corrente totale i associata alla distribuzione in esame.
[N.B. qui e nel seguito può essere utile ricordare che $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \mathrm{C}$].

2. Si determini il campo d'induzione magnetica $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ generato in tutto lo spazio dalla distribuzione assegnata. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ il versore associato alla coordinata cilindrica θ.

3. Si scriva l'espressione asintotica del campo per $\rho \gg \ell$, verificando la validità della legge di Biot-Savart.